

Die Pseudosphäre und die hyperbolische Geometrie

Edzard Salow

1. Euklid und die axiomatische Geometrie

Ein deduktiver Ansatz für die Geometrie, der auf Axiomen basiert, wurde im 6. bis 3. Jahrhundert v. Chr. in Griechenland entwickelt und von Euklid um 250 v. Chr. in dem Lehrbuch ‚Elemente‘ dargestellt. Dies war mehr als 2000 Jahre die Grundlage für die Beschäftigung mit der Geometrie. Die lebhaft diskutierte Frage, welche Axiome unverzichtbar sind, kam erst mit den ‚Grundlagen der Geometrie‘ von David Hilbert im Jahr 1899 zu einem gewissen Abschluss. Euklid versuchte, eine Basis für die logische Herleitung geometrischer Sätze durch Definitionen geometrischer Begriffe und die Angabe von Postulaten (d. h. Forderungen) bzw. Axiomen (d. h. Grundsätzen) über die Beziehungen zwischen geometrischen bzw. allgemeineren Begriffen herzustellen. In der ersten Definition heißt es z. B.: ‚Ein Punkt ist, was keine Teile hat.‘ Die in dieser Definition genannte Eigenschaft wird jedoch im Folgenden nicht mehr genutzt. Sie hat auch den Mangel, dass demnach auch z. B. die leere Menge ein Punkt wäre. Hilbert verzichtet auf eine Definition der Begriffe ‚Punkt‘, ‚Gerade‘ und ‚Ebene‘ und beschränkt sich auf eine Angabe der Beziehungen zwischen diesen Begriffen mit Hilfe von Axiomen. Dabei entfällt die Unterscheidung zwischen Axiomen und Postulaten.

Euklids erste beiden Postulate lauten [2]:

Gefordert soll sein:

1. Dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,
2. Dass man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann.

Bei Hilbert lauten die ersten beiden Axiome [4]:

- I1. Zu zwei Punkten A, B gibt es stets eine Gerade a, die mit jedem der beiden Punkte A, B zusammengehört.
- I2. Zu zwei Punkten A, B gibt es nicht mehr als eine Gerade, die mit jedem der beiden Punkte A, B zusammengehört.

Die in I2 betonte Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden zweier verschiedener Punkte wird von Euklid nicht erwähnt, jedoch stets stillschweigend vorausgesetzt. (Es lässt sich aber auch eine sinnvolle Geometrie ohne diese Eindeutigkeit begründen.) Diese Lückenhaftigkeit der Basis für die Deduktion wollte man in den 2000 Jahren nach Euklid wegen seiner großen Autorität nicht recht wahrnehmen. Sie zeigt sich z. B. schon in der ersten Konstruktionsaufgabe zu einem gleichseitigen Dreieck, bei der eine Voraussetzung über das Schneiden zweier Kreise fehlt. Es gibt aber ein Postulat (mit der Nummer 5), das in früheren Jahrhunderten heftige Diskussionen auslöste, nämlich das heute so genannte ‚Parallelen-Axiom‘:

5. Und dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

Etwas verkürzt bedeutet dies, dass sich zwei Geraden a , b schneiden, wenn sie von einer dritten Geraden c so geschnitten werden, dass $\angle(a,c) + \angle(c,b) < 180^\circ$ gilt.

Folgende Fragen traten in diesem Zusammenhang auf:

1. Passt das Parallelen-Axiom zur Welt?
2. Lässt es sich durch eine im Rahmen der übrigen Axiome äquivalente Eigenschaft ersetzen?
3. Führt die Negation des Parallelen-Axioms zu einem Widerspruch zu den übrigen Axiomen?

Zur ersten Frage meinte Proklos (412-485 n. Chr.) in einem Euklid-Kommentar:

„Denn dass es gewisse Linien gibt, die ins Unendliche einander nähern, aber nie zusammenfallen, mag unwahrscheinlich, ja widersinnig klingen; gleichwohl ist es eine Tatsache, die bei anderen Arten von Linien festgestellt worden ist.“ (Zitat nach [1], S. 169).

Proklos dachte dabei wohl an Hyperbeln, die sich der gleichen Asymptote nähern und deren Krümmung in großer Entfernung von den Symmetrieachsen sehr nahe bei Null ist. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) schrieb 1830 in einem Brief an Bessel:

„Wir müssen in Demut zugeben, dass wenn die Zahl bloß unseres Geistes Produkt ist, der Raum auch außer unserm Geiste eine Realität hat, der wir a priori ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können.“ (Zitat nach [1], S. 179)

Gauss stellte sich damit gegen den Philosophen Immanuel Kant (1724-1804), der die Aussagen der Geometrie nach Euklid als synthetische Aussagen a priori ansah, und durch seinen Ausschluss von Alternativen für das Raum-Verständnis den Widerstand gegen eine nicht-euklidische Geometrie hundert Jahre lang verfestigt hatte. Synthetische Aussagen a priori sind nach Kant Aussagen, deren Wahrheit sich weder aus einer Erfahrung, noch ausschließlich aus der Bedeutung der darin enthaltenen Begriffe ergibt. Kant schrieb in [5] (I Erster Teil §3, erschienen erstmals 1781):

„Geometrie ist eine Wissenschaft, welche die Eigenschaften des Raums synthetisch und doch a priori bestimmt. Was muss die Vorstellung des Raumes denn sein, damit eine solche Erkenntnis von ihm möglich ist? Er muss ursprünglich Anschauung sein; denn aus einem bloßen Begriffe lassen sich keine Sätze, die über die Begriffe hinausgehen, ziehen, welches doch in der Geometrie geschieht. Aber diese Anschauung muss a priori, d. h. vor aller Wahrnehmung eines Gegenstandes, in uns angetroffen werden, mithin reine, nicht empirische Anschauung sein. Denn die geometrischen Sätze sind insgesamt apodiktisch, d. i. mit dem Bewusstsein ihrer Notwendigkeit verbunden, z. B. der Raum hat nur drei Abmessungen; dergleichen Sätze aber können nicht empirische oder Erfahrungsurteile sein, noch aus ihnen geschlossen werden.“

Zur zweiten Frage schlug John Wallis (1616-1703) 1663 folgendes Axiom vor:

„Zu jeder beliebigen Figur gebe es stets eine andere ihr ähnliche von beliebiger Größe.“ (Zitat nach [1], S. 170)

und zeigte, dass daraus das Parallelen-Axiom folgt. Damit berührte er ein merkwürdiges Kennzeichen der nicht-euklidischen Geometrie, dass nämlich zwei Dreiecke mit gleichen Innenwinkeln stets kongruent sind.

Giovanni Saccheri (1667-1733) bewies, dass das Parallelen-Axiom ersetzbar ist durch die Eigenschaft, dass in einem Viereck mit drei rechten Winkeln notwendig auch der vierte Winkel ein rechter sein muss ([1], S. 171). Die Negation dieser Eigenschaft charakterisiert ebenfalls die nicht-euklidische Geometrie.

Die Folgerungen der Negation des Parallelen-Axiom unter Beibehaltung der übrigen Voraussetzungen Euklids wurde von Johann Heinrich Lambert (1712-1777) so weit untersucht ohne auf einen Widerspruch zu stoßen, dass er nicht mehr an der Widerspruchsfreiheit einer nicht-euklidischen Geometrie zweifelte. Er stellte einen Bezug zur Geometrie der Großkreise auf einer Kugeloberfläche (Sphäre) her, bei der jedes Dreieck aus Großkreisbögen eine Winkelsumme größer als 180° hat. Er schlug vor, bei einer Kugel mit reellwertigem Radius r formal einen Radius $r \cdot i = r \cdot \sqrt{-1}$ einzusetzen, wobei sich dann Winkelsummen kleiner als 180° ergeben ([1], S. 173). Ein ähnlicher Ansatz ist von Johann Bolyai (1802-1860) und Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1792-1856) unabhängig voneinander so weit geführt worden, dass um die Mitte des 19. Jahrhunderts die formale Widerspruchsfreiheit einer nicht-euklidischen Geometrie vielen Mathematikern als erwiesen erschien. Es fehlte aber analog der Großkreis-Geometrie der Kugel ein der Anschauung zugängliches Modell einer Geometrie, bei der die Winkelsumme im Dreieck kleiner als 180° war. Diese Geometrie wird als ‚hyperbolische Geometrie‘ bezeichnet. Ein überzeugendes Modell der hyperbolischen Geometrie wurde im Jahr 1868 von Eugenio Beltrami (1835-1900) gefunden. Es benützt geodätische Linien auf der Pseudosphäre, die in den nächsten Abschnitten erklärt wird. Die historische Entwicklung ist ausführlicher in [3] dargestellt.

Die Geometrie der Pseudosphäre hat den Nachteil, dass Kongruenz-Abbildungen zwar definierbar sind, aber nicht so, dass ihr Definitionsbereich die ganze Punktmenge der Pseudosphäre umfasst. Diesen Nachteil vermeidet das 1871 von Felix Klein (1849-1925) angegebene Modell (Abschnitt 20), das schon in Ideen von Beltrami angelegt war und darum ‚Beltrami-Klein-Modell‘ genannt wird, oder kürzer ‚Klein-Modell‘. Das, was als ‚*Punkt*‘ im Sinne eines Axiomensystems der hyperbolischen Geometrie betrachtet wird, ist in diesem Modell ein euklidischer Punkt im Innern eines fest vorgegebenen euklidischen Kreises K ; die euklidischen Punkte auf dem Kreis und außerhalb davon sind keine ‚*Punkte*‘. Als ‚*Gerade*‘ im Sinne des nicht-euklidischen Axiomensystems wird eine Sehne von K angesehen, mit Ausnahme der Endpunkte. Abstände und Winkelgrößen können dann sinnvoll definiert werden, unterscheiden sich aber von euklidischen Werten.

Man könnte hier einwenden, dass diese ‚*Punktmenge*‘ eine nur endliche Ausdehnung hat, im Widerspruch zur normalen geometrischen Intuition. Dieser Mangel lässt sich aber dadurch beheben, dass man die Kreis-Punktmenge $\{(x; y; 1) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ in der Ebene $z = 1$ vom

Ursprung aus auf die Hyperboloid-Schale $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ projiziert und danach die Projektion parallel zur z -Achse auf die x - y -Ebene nachschaltet. Bei diesem Hyperbel-Modell (Abschnitt 24) geht allerdings die Geradlinigkeit der ‚*Geraden*‘ verloren, denn aus den Strecken werden Hyperbeln. Geradlinig sind die ‚*Geraden*‘ auch nicht im Fall des zum Klein-Modell äquivalenten Modells, das Henri Poincaré (1854-1912) im Jahr 1881 angegeben hat (Abschnitt 10). Darin wird unter einem ‚*Punkt*‘ ein euklidischer Punkt auf einer Seite einer vorgegebenen euklidischen Geraden g verstanden, und unter einer ‚*Geraden*‘ ein Halbkreis, dessen Endpunkte auf g liegen. Dieses Modell hat zwar gegenüber dem Beltrami-Klein-Modell den Nachteil, dass ‚*Geraden*‘ nicht euklidisch geradlinig sind, aber den Vorteil, dass das euklidische Winkelmaß benutzt werden kann.

Dass hier von ‚*Punkten*‘ in Anführungsstrichen und in violetter Farbe zur Betonung des Bezugs auf ein nicht-euklidisches Axiomensystem geschrieben wird, macht deutlich, dass man seit dem 19. Jahrhundert Axiomensysteme in einem anderen Licht als Euklid und auch als Kant sah. Dies hat Moritz Pasch (1843-1930) besonders klar formuliert:

‚Es muss in der Tat, wenn anders die Geometrie wirklich deduktiv sein soll, der Prozess des Folgerns überall unabhängig sein vom Sinn der geometrischen Begriffe, wie er unabhängig

sein muss von den Figuren; nur die in den benutzten Sätzen beziehungsweise Definitionen niedergelegten Beziehungen zwischen den geometrischen Begriffen müssen in Betracht kommen. Während der Deduktion ist es zwar statthaft und nützlich, aber keineswegs nötig, an die Bedeutung der auftretenden geometrischen Begriffe zu denken.' (Zitat nach [1], S. 201)

David Hilbert soll die Bedeutung der Grundbegriffe in Axiomensystemen plastisch dadurch ausgedrückt haben, dass er meinte, statt ‚*Punkt*‘ und ‚*Gerade*‘ könne man auch ‚*Bierseidel*‘ und ‚*Tisch*‘ schreiben, ohne dass sich dadurch die Deduktionen auf Grund seines Axiomensystems ändern würden.

Wir werden im folgenden Text keinen axiomatischen Ansatz verfolgen, sondern nur den Zusammenhang zwischen der Pseudosphäre, dem Poincare-Modell und dem Beltrami-Klein-Modell mit dem Zwischenglied des Halbkugel-Modells, sowie das Hyperbel-Modell mit Hilfe von Koordinaten darstellen. Dies hat jenseits der Bedeutung für die Entwicklung der Axiomatik einen Sinn, weil es sich hier um Objekte der euklidischen Geometrie mit überraschenden Zusammenhängen handelt.

Wir folgen mit unserer Darstellung insofern der historischen Entwicklung, als wir von der Pseudosphäre ausgehen, die den Vorteil hat, dass auf ihr die Winkelmessung und die Entfernungsmessung auf den Geodäten durch die euklidischen Maßbestimmungen im dreidimensionalen Raum festgelegt werden. Aus der Darstellung einer Geodäte mit Polarkoordinaten r (= Abstand vom Ursprung) und w (= Richtungswinkel) ergibt sich dann durch die einfache Transformation $(r; w) \rightarrow \left(w; \frac{1}{r} \right)$ ein Halbkreis im Poincare-Modell. In

diesem Modell bleibt die Winkelmessung euklidisch, nicht aber die Abstandsmessung. Durch stereographische Projektion gelangen wir dann aus dem Poincare-Modell zum Halbkugel-Modell, aus dem sich durch Projektion parallel zur z -Achse auf die x - y -Ebene das Beltrami-Klein-Modell ergibt. Das Halbkugel-Modell, das schon von Beltrami untersucht wurde, stellt ein Zwischenglied zwischen Poincare-Modell und Beltrami-Klein-Modell dar, das Vorteile beider Modelle verbindet, allerdings wie die Pseudosphäre ein räumliches Modell ist. Die ‚*Punkte*‘ sind nämlich die Punkte der oberen Hälfte der Fläche einer Kugel vom Radius 1 um den Ursprung. Die ‚*Geraden*‘ sind die Schnittkurven mit Ebenen parallel zur z -Achse. Die Winkelmessung ist auch hier euklidisch, nicht aber die Abstandsmessung.

Das Halbkugel-Modell ist eine Variation zu einem geometrischen Modell-Typ, mit dem man die euklidische, die hyperbolische und die elliptische Geometrie unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt zusammenfassen kann. Dazu nimmt man eine Kugeloberfläche K und einen Punkt Z , der im Fall des Halbkugel-Modells der unendlich ferne Punkt auf der z -Achse ist. Als Menge der ‚*Punkte*‘ definiert man dann die Menge der Raum-Geraden durch Z , die K in zwei Punkten schneiden. Die Menge der ‚*Geraden*‘ ist die Menge der Ebenen im Raum, die durch Z gehen und die Kugel in mehr als einem Punkt treffen. Dieses Modell ist hyperbolisch, euklidisch bzw. elliptisch, je nachdem Z außerhalb, auf bzw. innerhalb von K liegt.

2. Traktrix, Kreis und Kettenlinie

Die Pseudosphäre entsteht durch Rotation des Graphen von

$$f : x \rightarrow \ln \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} + \frac{1}{x} \right) - \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 < x \leq 1 \text{ um die } y\text{-Achse. Es ist } f(x) = \int_x^1 \sqrt{\frac{1}{z^2} - 1} \, dz.$$

Dieser Graph wird aus folgendem Grund als Traktrix oder Schleppekurve bezeichnet: Ein schwerer punktförmiger Körper, der auf der x - y -Ebene zunächst im Punkt $(1,0)$ liegt, werde

an einem Seil der Länge 1 an dem Seilende vom Punkt (0,0) aus längs der positiven y-Achse gezogen. Dann bewegt sich der Körper auf der Traktrix. Die Traktrix ist die Drehpunktcurve zur Drehpunktfunction $\alpha \rightarrow -\ln(\cos(\alpha)), 0 \leq \alpha < 90^\circ$.

(www.vivat-geo.de/Pdf-Dateien/Drehpunktfunction.pdf).

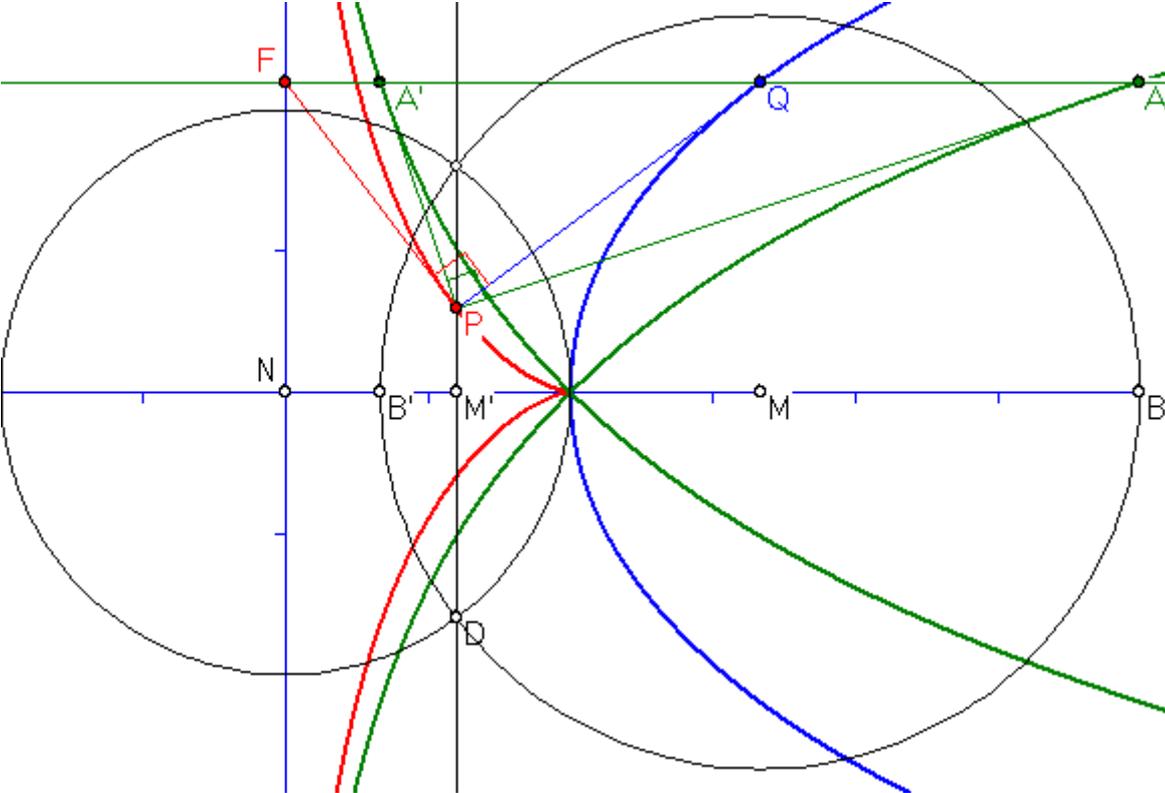


Abb. 1

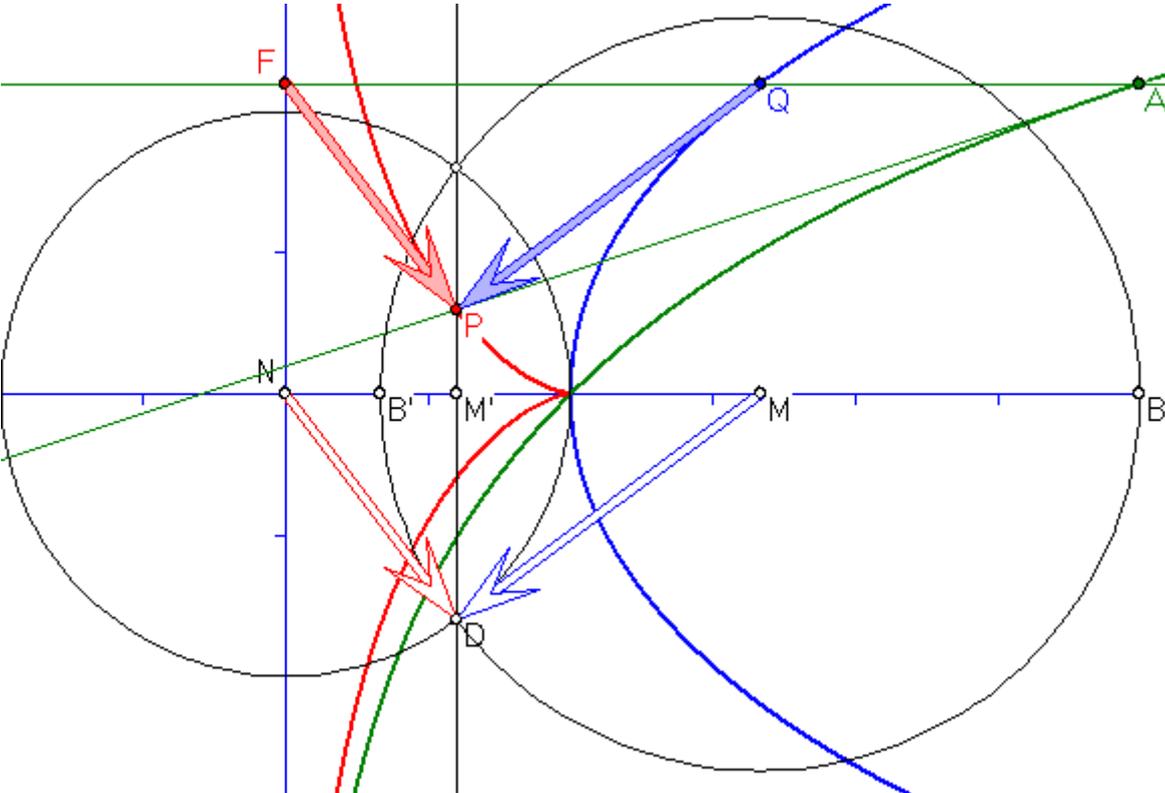


Abb. 2

Im folgenden Satz 1 beziehen wir uns auf die Darstellung mit Hilfe von f.

Satz 1 : $A(a; \ln(a))$ bzw. $A'\left(\frac{1}{a}; \ln(a)\right)$ sei ein Punkt auf den Graphen der natürlichen Logarithmus-Funktion $x \rightarrow \ln(x)$, $x \geq 0$ bzw. $x \rightarrow -\ln(x)$, $x \geq 0$. Der Punkt $Q(m; \ln(a))$ mit $m = 0,5 \cdot \left(a + \frac{1}{a}\right)$ sei der Mittelpunkt von A und A' . Für $a \geq 1$ sei $v := 1$ und für $0 < a < 1$ sei

$v := -1$ definiert (als Vorzeichenfaktor). Es sei $r := \sqrt{m^2 - 1}$. Dann gilt:

1. r ist der Radius des Kreises um $M(m; 0)$, der den Einheitskreis um $N(0; 0)$ senkrecht schneidet und mit der Rechtsachse die Punkte $B(a; 0)$ und $B'\left(\frac{1}{a}; 0\right)$ gemeinsam hat.

B' entsteht aus B durch Spiegelung am Einheitskreis. $r = v \cdot 0,5 \cdot \left(a - \frac{1}{a}\right) = \sinh(\ln(a))$.

2. Die Tangenten in A und A' schneiden sich senkrecht auf dem Graphen von $x \rightarrow v \cdot f(x)$ im Punkt $P\left(\frac{2 \cdot a}{a^2 + 1}; \ln(a) - \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}\right) = \left(\frac{1}{m}; \ln(a) - v \cdot \frac{r}{m}\right)$.
3. Die Tangente an den Graphen von $v \cdot f$ in P geht durch $F(0; \ln(a))$ und hat die Steigung $-v \cdot r$. Die Strecke \overline{FP} hat die Länge $|\overline{FP}| = 1$.
4. Q liegt auf dem Graphen der Funktion $g: x \rightarrow v \cdot \operatorname{arccosh}(x) = v \cdot \ln\left(\sqrt{x^2 - 1} + x\right)$, $x \geq 1$. Die Tangente in Q an diesen Graphen schneidet den Graphen von $v \cdot f$ senkrecht in P und hat die Steigung $v \cdot \frac{1}{r}$. Die Strecke \overline{QP} hat die Länge $|\overline{QP}| = r$.
5. Die Verschiebung $(x; y) \rightarrow (x; y - \ln(a))$ verschiebt die Punkte F , A' , Q und A in die Punkte N , B' , M und B auf der x -Achse. Dabei wird P in den Punkt $D\left(\frac{1}{m}; -v \cdot \frac{r}{m}\right)$ verschoben, in dem sich der Einheitskreis um N und der Kreis um M durch B und B' senkrecht schneiden.

Beweis: 1. Der Kreis um M , der den Einheitskreis um N senkrecht schneidet, hat Schnittpunkte C und D , die mit N und M ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Darum ist sein Radius gleich $\sqrt{m^2 - 1}$. Für $a \geq 1$ ist $\sqrt{m^2 - 1} + m$ gleich a und $r = 0,5 \cdot \left(a - \frac{1}{a}\right) = \sinh(\ln(a))$.

Für $a < 1$ ist $\sqrt{m^2 - 1} + m$ gleich $\frac{1}{a}$ und $r = -0,5 \cdot \left(a - \frac{1}{a}\right) = -\sinh(\ln(a))$. Darum sind

$B(a; 0)$ und $B'\left(\frac{1}{a}; 0\right)$ die Schnittpunkte des Kreises um M mit der x -Achse.

2. Die Tangenten in A und A' haben die Gleichungen $y = \frac{1}{a} \cdot x - 1 + \ln(a)$ bzw.

$y = -a \cdot x + 1 + \ln(a)$. Der Schnittpunkt ist

$$\left(\frac{2 \cdot a}{a^2 + 1}; \ln(a) - \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \right) = \left(\frac{1}{m}; \ln(a) - v \cdot \frac{r}{m} \right) = \left(\frac{1}{m}; v \cdot f\left(\frac{1}{m}\right) \right).$$

3. Die Ableitung von f ist $f'(x) = -\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}$, also $f'\left(\frac{1}{m}\right) = -\sqrt{m^2 - 1} = -r$. Die Gleichung der

Tangente in P ist $y = -v \cdot r \cdot \left(x - \frac{1}{m}\right) + \ln(a) - v \cdot \frac{r}{m} = -v \cdot r \cdot x + \ln(a)$. Darum geht sie durch F

und es ist $|\overline{FP}| = \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \left(\frac{r}{m}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+r^2}{m^2}} = 1$.

4. Da $\sqrt{m^2 - 1} + m$ für $a \geq 1$ gleich a ist und für $a < 1$ gleich $\frac{1}{a}$, liegt Q auf dem Graphen von

$v \cdot g$. Die Ableitung von g ist $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, also $g(m) = \frac{1}{r}$. Die Gleichung der Tangente in

Q darum $y = v \cdot \frac{1}{r} \cdot (x - m) + \ln(a) = \frac{v}{r} \cdot (x - m) + \ln(a)$. Wegen $\frac{1}{m} - m = -\frac{m^2 - 1}{m} = -\frac{r^2}{m}$ liegt

P auf dieser Tangente und es ist $|\overline{QP}| = \sqrt{\left(m - \frac{1}{m}\right)^2 + \left(\frac{r}{m}\right)^2} = \sqrt{m^2 - 1} = r$.

5. folgt unmittelbar aus den vorangehenden Behauptungen. □

Die Graphen von g und -g bilden (um 90° gedreht) zusammen die Kettenlinie, welche die Form einer hängenden Kette beschreibt. Wenn man ein Lineal an den Graphen von g tangential so anlegt, dass der Nullpunkt des Lineals beim Punkt (1 ; 0) liegt und dann das Lineal ohne zu Rutschen an dem Graphen von g abrollt, dann bewegt sich der Nullpunkt des Lineals auf der Traktrix. Aus Satz 1 ergeben sich darum folgende geometrischen Zusammenhänge:

- Q ist der Krümmungsmittelpunkt der Traktrix im Punkt P. Also ist die Kettenlinie die Evolute der Traktrix und die Traktrix die Evolvente der Kettenlinie. Der Betrag des Krümmungsradius $r = |\overline{PQ}|$ stimmt mit der Bogenlänge der Kettenlinie zwischen Q und dem Punkt (1 ; 0) überein.
- In jedem Punkt P der Traktrix ist der Betrag der Steigung gleich r, stimmt also mit dem Krümmungsradius überein.
- In jedem Punkt Q der Kettenlinie stimmt der Betrag der Steigung mit dem Betrag $\frac{1}{r}$ der Krümmung in dem Punkt P der Traktrix überein, der auf der Tangente in Q liegt.
- D sei ein Punkt des Einheitskreises um den Ursprung N mit dem gleichen x-Wert wie der Punkt P auf der Traktrix. Dann stimmt die Länge des Abschnitts auf der Tangente in P zwischen P und der y-Achse mit dem Krümmungsradius 1 des Einheitskreises überein. Und die Länge des Abschnitts auf der Tangente in D zwischen D und der x-Achse stimmt mit dem Krümmungsradius der Traktrix in P überein.

3. Die Pseudosphäre

Die Abbildung 3 zeigt das Netz einer Pseudosphäre mit acht Meridianen und den Breitenkreisen mit Radien $n \cdot 0,1$ für ganzzahlige $n \in [1;10]$. Von dem Punkt Z auf der z-Achse sind die Tangentenabschnitte zu den Meridianen rot eingezeichnet, die alle die Länge 1 haben.

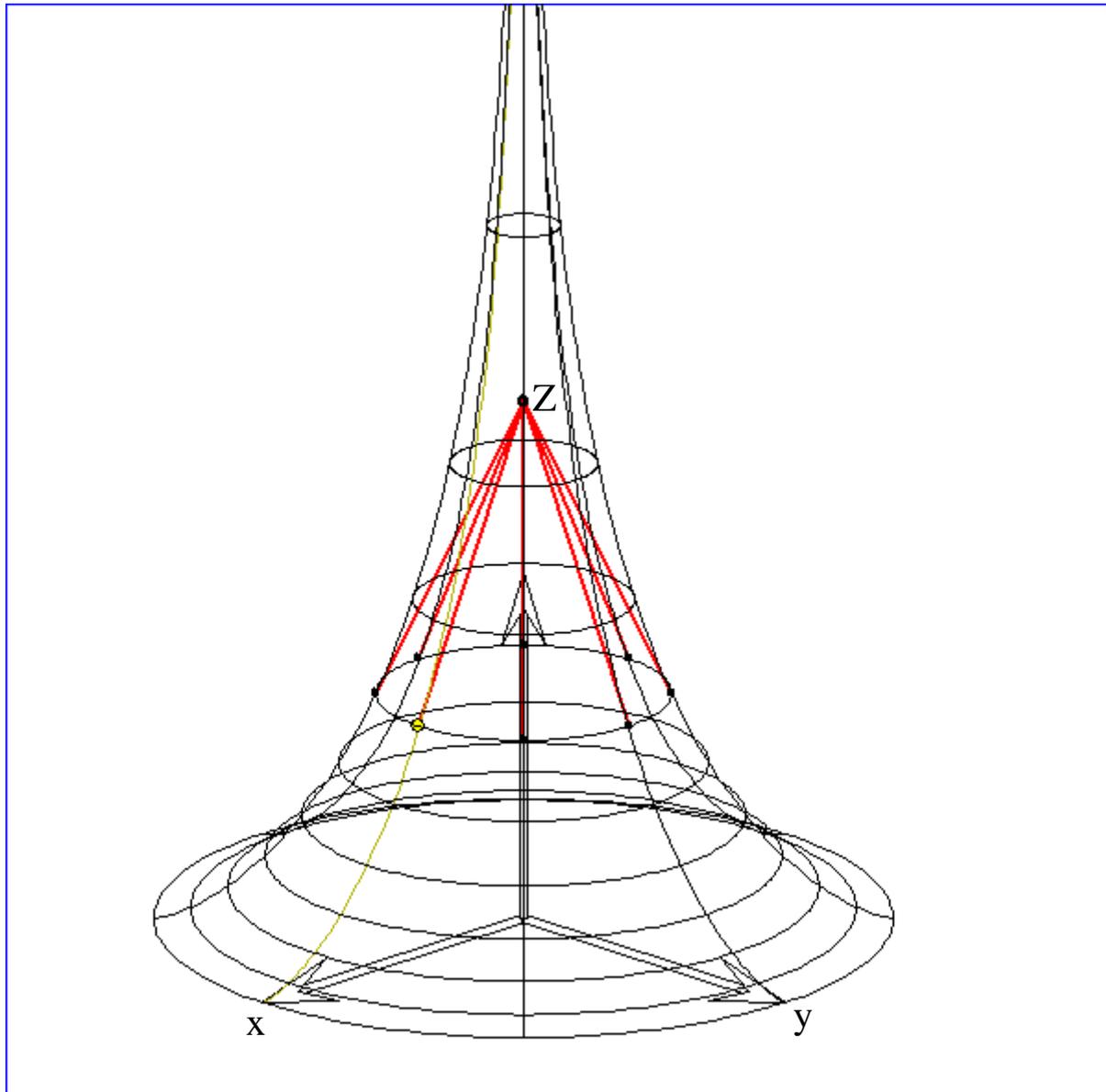


Abb. 3

Die Pseudosphäre hat mit der Kugelfläche die Eigenschaft gemeinsam, dass ihre Krümmung konstant ist, allerdings mit negativem Wert. Die Krümmung einer Kurve im Punkt P ist definiert als der Kehrwert des Radius eines Kreises, der sich der Kurve im Punkt P optimal anschmiegt (so dass eine Übereinstimmung bis zur 2. Ordnung vorliegt). Je nachdem, auf welcher Seite der Kurve der Schmiegekreis liegt, gibt man diesem Wert, wie auch dem Radius selbst, ein positives oder negatives Vorzeichen. Zur Definition der Krümmung in einem Punkt P einer Fläche kann man nicht analog eine Schmiege-Kugelfläche definieren, die nur von P abhängt, da eine Fläche in unterschiedlichen Richtungen unterschiedlich gekrümmt sein kann.

Es ist aber möglich, zu jeder Tangente h in Punkt P einer Fläche F eine Schmiegkugelfläche zu definieren. Dazu betrachtet man Schnittkurven mit F für die Ebenen, die h enthalten. Nach dem Satz von Jean Baptiste Meusnier (1754-1793) liegen die Schmiegkreise in P aller dieser Schnittkurven auf einer Kugel. Der Kehrwert des Radius dieser Kugel wird als Krümmung der Fläche in P in Richtung von h bezeichnet. Es ist die Krümmung der Schnittkurve von der Ebene E_{normal} , die h enthält und auch die Normal-Gerade g durch P , die senkrecht auf der Fläche F steht. Sie heißt darum auch Normal-Krümmung k_{normal} zu P und h und ihr Krümmungsradius r_{normal} Normal-Krümmungsradius. Wenn eine Ebene E durch h mit E_{normal} den Winkel α einschließt, dann hat ihre Schnittkurve in P den Krümmungsradius

$$r_{\text{normal}} \cdot \cos(\alpha) \text{ und die Krümmung } \frac{k_{\text{normal}}}{\cos(\alpha)}.$$

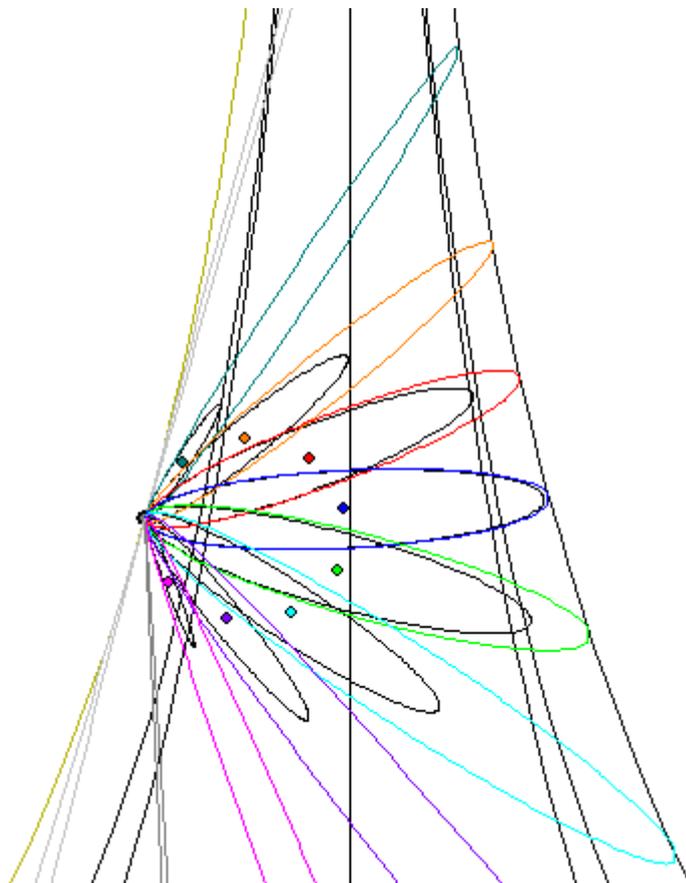


Abb. 4

Die Abbildung 4 zeigt für die Pseudosphäre farbige Schnittkurven für Ebenen durch den Punkt $P(0,26 ; 0 ; f(0,26))$, welche die Tangente t in P an den Breitenkreis durch P enthalten. Die zugehörigen schwarz gezeichneten Schmiegkreise liegen auf einer Kugelfläche und haben Mittelpunkte auf einem Kreis in der Meridian-Ebene durch P . Die hellgrüne Schnittkurve liegt in der Ebene durch t und die Normal-Gerade g durch P . Ihr Krümmungsradius in P ist der Schmieg-Kugelradius. Die dunkelblaue Schnittkurve ist ein Breitenkreis.

Zur Definition der Krümmung der Fläche F im Punkt P , die unabhängig von einer speziellen Tangenten-Richtung ist, betrachtet man die Normal-Krümmungen zu allen Tangenten in P . Zu jedem P gibt es darunter zwei Richtungen mit extremalen Krümmungen, die als Haupt-

Krümmungen bezeichnet werden. Die beiden Richtungen sind stets orthogonal. Als Gauss-Krümmung von F in P wird das Produkt der beiden Haupt-Krümmungen definiert, nach dem Erfinder Carl Friedrich Gauss.

Satz 2 : Die Pseudosphäre hat in allen Punkten die gleiche Gauss-Krümmung -1 .

Beweis : Bei der Pseudosphäre ist eine dieser Haupt-Krümmungen die der Schnittkurve t einer Ebene T , die die z -Achse enthält, da T dann Symmetrie-Ebene ist. t ist ein Meridian in Form einer Traktrix. Nach Satz 1 stimmt ihr Krümmungsradius in P mit der Steigung in P im Betrag überein.

S sei die dazu orthogonale Ebene durch P , deren Schnittkurve s (in Abb. 4 die hellgrüne Kurve) die zweite Haupt-Krümmung hat. s hat in P die gleiche Tangente wie der Breitenkreis durch P . Zwischen den Krümmungsradius r_{normal} von s in P und dem Radius r_{Breiten} des Breitenkreises besteht nach dem Satz von Meusnier der Zusammenhang

$r_{\text{Breiten}} = r_{\text{normal}} \cdot \cos(\alpha)$. Dabei ist der Winkel α zwischen S und der Breitenkreis-Ebene gleich groß wie der Winkel zwischen der Traktix-Tangente in P und der z -Achse. Da der Tangentenabschnitt darauf die Länge 1 hat, ist $r_{\text{Breiten}} = \sin(\alpha)$, folglich $r_{\text{normal}} = \tan(\alpha)$. Da der Winkel α und der Steigungswinkel in P zusammen 90° ergeben, ist r_{normal} folglich der Kehrwert dieses Steigungswinkels. Der Betrag der Gauss-Krümmung ist daher 1. Da s die Schnittkurven s und t auf unterschiedlichen Seiten der Tangenten-Ebene in P liegen, gibt man ihren Krümmungen ein unterschiedliches Vorzeichen. Darum folgt die Behauptung. \square

3. Geodäten

Johann Bernoulli (1667-1748) untersuchte als erster kürzeste Wege zwischen zwei Punkten auf einer gekrümmten Fläche F . Kürzeste Wege zwischen zwei Punkten sind manchmal nicht eindeutig bestimmt, zum Beispiel, wenn die Punkte Antipoden auf einer Kugeloberfläche sind. Die Abbildung 5 zeigt mit den beiden magentafarbenen Kurven zwei gleich lange kürzeste Verbindungen auf der Pseudosphäre F zwischen den Punkten $(0,5 ; 0 ; f(0,5))$ und $(-0,7 ; 0 ; f(-0,7))$, zusammen mit ihrem Schatten bei der Projektion parallel zur z -Achse auf die x - y -Ebene. Daneben sind zwei weitere Verbindungswege rot und blau eingezeichnet, die zwar keine kürzesten Verbindungen sind, aber mit den magentafarbenen Wegen die folgende Eigenschaft gemeinsam haben:

Zu jedem Punkt P auf dem Weg G gibt es eine Umgebung von P , so dass jeder Punkt Q auf G , der innerhalb der Umgebung liegt, durch G auf kürzeste Weise verbunden wird.

Wege mit dieser Eigenschaft wurden von Joseph Liouville (1809-1882) 1844 ‚geodätische Linien‘, kurz ‚Geodäten‘, genannt. Schon Bernoulli erkannte, dass man derartige Wege experimentell in folgender Weise erhält:

Man legt einen dünnen geraden Stab in einem Punkt P auf der Fläche F tangential an, wählt auf dem Stab einen Punkt Q möglichst nahe bei P , und drückt den Stab in Q so gegen die Fläche F , dass sich Q senkrecht zur Fläche F hinbewegt, wobei sich der Stab bei P von der Fläche entfernt. Wiederholt man diesen Vorgang häufig mit einem jeweils zum aktuellen Berührungspunkt P benachbarten Punkten Q , so bewegt sich P (näherungsweise) auf einer Geodäte.

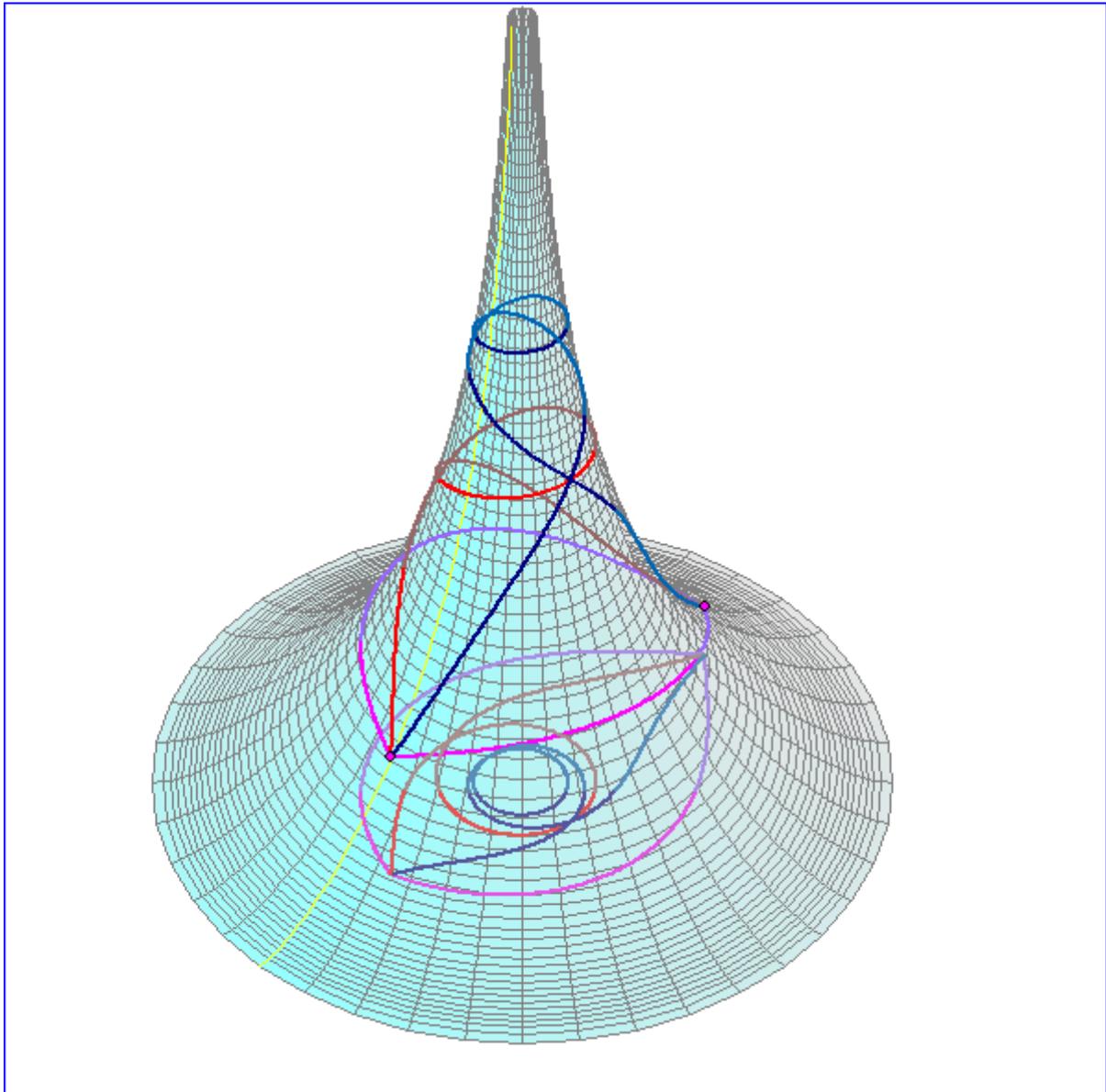


Abb. 5

Wir präzisieren diese Grundidee zur

Definition : Gegeben sei eine Fläche F im dreidimensionalen Raum \mathbf{R}^3 , für die in jedem Punkt eine eindeutige Tangentialebene definiert ist. $t \rightarrow G(t) \in F$ sei eine zweimal differenzierbare Funktion von einem Intervall I reeller Zahl in die Fläche F , so dass es zu jedem t einen eindeutigen Tangentenvektor $\overrightarrow{G'(t)}$ mit der Länge $|\overrightarrow{G'(t)}| \neq 0$ gibt. Die

Bildmenge von G heißt dann Geodäte, wenn die Ableitung des Vektors $\frac{\overrightarrow{G'(t)}}{|\overrightarrow{G'(t)}|}$ (mit der

Länge 1) der Nullvektor oder senkrecht zur Tangentialebene in $G(t)$ gerichtet ist.

Die Funktion $t \rightarrow G(t)$ nennen wir ‚Geodätenfunktion‘.

Ein Vektor, der senkrecht zur Tangentialebene in $G(t)$ gerichtet oder der Nullvektor ist, wird auch ‚Normalenvektor von F in $G(t)$ ‘ genannt.

Bei einer Parametertransformation $t = k(\tau)$ mit einer zweimal differenzierbare Funktion k , deren Ableitung keine Nullstellen hat, ändert sich $\frac{\overline{G'(t)}}{|\overline{G'(t)}|}$ in $\frac{\overline{G'(k(\tau))} \cdot k'(\tau)}{|\overline{G'(k(\tau))}| \cdot |k'(\tau)|}$, was bis auf das

Vorzeichen mit $\frac{\overline{G'(k(\tau))}}{|\overline{G'(k(\tau))|}$ übereinstimmt. Darum ändert sich bei dieser

Parametertransformation die Geodäten-Eigenschaft nicht.

Als Beispiel sehen wir uns den Nullmeridian der Pseudosphäre F an, der in der Abbildung 5 als gelb-graue Traktix eingezeichnet ist. Der Parameter t sei die x -Koordinate und $I = (0 ; 1]$.

Die Rolle von G übernimmt dann die Funktion $x \rightarrow f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} + \frac{1}{x}\right) - \sqrt{1 - x^2}$. Der

Tangentenvektor im Punkt $(x ; 0 ; f(x))$ ist der Vektor $(1; 0; f'(x)) = \left(1; 0; -\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right)$ mit der

Länge $\frac{1}{x}$. Der zugehörige Tangenteneinheitsvektor ist also $\frac{(1; 0; f'(x))}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} = (x; 0; -\sqrt{1 - x^2})$

mit dem Ableitungsvektor $\left(1; 0; \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$, der sowohl senkrecht zum Tangentenvektor

$(1; 0; f'(x))$ steht, als auch zum Vektor $(0 ; 1 ; 0)$, der zusammen mit $(1; 0; f'(x))$ die Tangentialebene aufspannt.

Dies würde sich auch bei einem anderen Funktionsterm $g(x)$ ergeben, denn die Ableitung von

$\left(\frac{1}{\sqrt{1 + (g'(x))^2}}; 0; \frac{g'(x)}{\sqrt{1 + (g'(x))^2}}\right)$ ist der dazu senkrechte Vektor

$\left(-\frac{g'(x) \cdot g''(x)}{\left(\sqrt{1 + (g'(x))^2}\right)^3}; 0; \frac{g''(x)}{\left(\sqrt{1 + (g'(x))^2}\right)^3}\right)$.

Definition : Die Fläche, die durch z -Achsen-Rotation des Graphen einer Funktion $x \rightarrow g(x), x \in J$ mit einem Intervall J aus nicht negativen reellen Zahlen entsteht, nennen wir ‚die von g erzeugte Rotationsfläche‘.

Der Nullmeridian ist also bei allen von g erzeugten Rotationsflächen eine Geodäte, wie auch alle anderen Meridiane, da sie aus dem Nullmeridian durch Drehung um die z -Achse hervorgehen. Zur Bestimmung der übrigen Geodäten ist es sinnvoll, den Richtungswinkel w der Punkte in der x - y -Ebene zu benutzen. Für einen Punkt $P(x ; y)$ ist w die Winkelgröße

\square ENP mit $E = (1 ; 0)$ und $N = (0 ; 0)$, die zusammen mit dem Abstand $r = |\overline{PN}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

den Punkt P in Polarkoordinaten festlegt. Die ‚ x - y -Ebene‘ genannte Koordinatenebene nennen wir ‚ r - w -Ebene‘ in Zusammenhängen, in denen die Punkte durch Polarkoordinaten angegeben werden. Zwischen den Polarkoordinaten und den kartesischen Koordinaten $(x ; y)$ besteht die Beziehung $(x; y) = (r \cdot \cos(w); r \cdot \sin(w))$.

Die von g erzeugte Rotationsfläche ist in einer Darstellung in kartesischen Koordinaten die Punktmenge $\{(r \cdot \cos(w); r \cdot \sin(w); g(r)) | r \in J; 0 \leq w < 2 \cdot \pi\}$. Statt der Bedingung

$0 \leq w < 2 \cdot \pi$ hätte man hier wegen der Periodizität der Sinus- und der Kosinus-Funktion auch

$w \in \mathbf{R}$ schreiben können. Mit Hilfe einer Funktion $w \rightarrow r(w)$, $w \in I$ mit einem Intervall I aus Winkelgrößen, das nicht notwendig Teilmenge von $[0, 2\pi)$ ist, und Werten in J erhält man dann eine Funktion $K : w \rightarrow (r(w) \cdot \cos(w); r(w) \cdot \sin(w); g(r(w)))$, deren Bildmenge eine Kurve auf der Rotationsfläche F beschreibt. Wir nennen diese Kurve ‚die von $w \rightarrow r(w)$, $w \in I$ induzierten Kurve auf F ‘. Bei Geodäten benutzen wir statt K den Buchstaben G . Der Graph von $w \rightarrow r(w)$, $w \in I$ in der r - w -Koordinatenebene ergibt sich durch Projektion des auf F induzierten Wegs parallel zur z -Achse. In Abbildung 5 sind die Graphen von $w \rightarrow r(w)$, $w \in I$, die dort die Geodäten induzieren, als Schatten eingezeichnet. Wir bezeichnen die Funktion $K_s : w \rightarrow (r(w) \cdot \cos(w); r(w) \cdot \sin(w); 0)$ mit dem Index ‚S‘ als Schattenkurve-Funktion von K .

Bei dieser Bezeichnungsweise haben wir den Buchstaben ‚ r ‘ sowohl als Bezeichnung für eine Variable als auch für eine Funktion benutzt, wie es häufig in der Physik üblich ist. Nur wenn Verwechslungen zu befürchten sind, werden wir im Folgenden $\rho(w)$ statt $r(w)$ schreiben.

Satz 2 : g sei eine zweimal differenzierbare reellwertige Funktion mit einem Intervall J reeller Zahlen als Definitionsbereich und F die davon erzeugte Rotationsfläche. $w \rightarrow r(w)$, $w \in I$ sei eine zweimal differenzierbare Funktion mit Werten in J und $h(w) := g(r(w))$.

$w \rightarrow r(w)$, $w \in I$ induziert genau dann eine Geodäte auf F , wenn für alle $w \in I$ gilt:

$$-r(w) \cdot h'(w) \cdot h''(w) + 2 \cdot r'(w) \cdot h'(w)^2 - r(w) \cdot r'(w) \cdot r''(w) + 2 \cdot r'(w)^3 + r'(w) \cdot r(w)^2 = 0 \quad (*)$$

Beweis : Die Ableitung von $G : w \rightarrow (r(w) \cdot \cos(w); r(w) \cdot \sin(w); h(w))$ ergibt den Tangentenvektor

$$\overline{G'(w)} = (r'(w) \cdot \cos(w) - r(w) \cdot \sin(w), r'(w) \cdot \cos(w) + r'(w) \cdot \sin(w), h'(w)) = r'(w) \cdot (\cos(w); \sin(w); 0) + r(w) \cdot (-\sin(w); \cos(w); 0) + h'(w) \cdot (0; 0; 1).$$

Dabei sind die Vektoren $\vec{a} := (\cos(w); \sin(w); 0)$, $\vec{b} := (-\sin(w); \cos(w); 0)$ und

$\vec{c} := (0; 0; 1)$ paarweise orthogonal. Darum ist $|\overline{G'(w)}| = \sqrt{r'(w)^2 + r(w)^2 + h'(w)^2}$ und

$$\left| \overline{G'(w)} \right|' = \frac{r'(w) \cdot r''(w) + r(w) \cdot r'(w) + h'(w) \cdot h''(w)}{|\overline{G'(w)}|}.$$

Die Ableitung von \vec{a} ist \vec{b} , die von \vec{b} ist $-\vec{a}$ und die von \vec{c} ist der Nullvektor. Mit der Produktregel folgt aus $\overline{G'(w)} = r'(w) \cdot \vec{a} + r(w) \cdot \vec{b} + h'(w) \cdot \vec{c}$:

$$\left(\frac{\overline{G'(w)}}{|\overline{G'(w)}|} \right)' = \left(\left(\frac{r'(w)}{|\overline{G'(w)}|} \right)' - \frac{r(w)}{|\overline{G'(w)}|} \right) \cdot \vec{a} + \left(\frac{r'(w)}{|\overline{G'(w)}|} + \left(\frac{r(w)}{|\overline{G'(w)}|} \right)' \right) \cdot \vec{b} + \left(\frac{h'(w)}{|\overline{G'(w)}|} \right)' \cdot \vec{c}. \text{ Die drei}$$

Faktoren von \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} seien α , β und γ genannt.

Nach der Kettenregel ist $g'(r(w)) \cdot r'(w) = h'(w)$. Darum wird die Tangentialebene im Punkt $G(w)$ von den Vektoren $r'(w) \cdot \vec{a} + h'(w) \cdot \vec{c}$ und \vec{b} aufgespannt. Die Bildmenge von G ist eine

Geodäte genau dann, wenn $\left(\frac{\overline{G'(w)}}{|\overline{G'(w)}|} \right)'$ orthogonal zur Tangentialebene im Punkt $G(w)$ ist,

also wenn $r'(w) \cdot \alpha + h'(w) \cdot \gamma = 0$ und $\beta = 0$ gilt.

Erste Gleichung:

$$0 = r'(w) \cdot \alpha + h'(w) \cdot \gamma =$$

$$r'(w) \cdot \left(\frac{|\overline{G'(w)}| \cdot r''(w) - |\overline{G'(w)}'| \cdot r'(w)}{|\overline{G'(w)}|^2} - \frac{r(w)}{|\overline{G'(w)}|} \right) + h'(w) \cdot \frac{|\overline{G'(w)}| \cdot h''(w) - |\overline{G'(w)}'| \cdot h'(w)}{|\overline{G'(w)}|^2}.$$

Durch Multiplikation mit $|\overline{G'(w)}|^3$ ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= r'(w) \cdot \left((r'(w)^2 + r(w)^2 + h'(w)^2) \cdot (r''(w) - r(w)) \right) \\ &\quad - r'(w)^2 \cdot (r'(w) \cdot r''(w) + r(w) \cdot r'(w) + h'(w) \cdot h''(w)) \\ &+ h'(w) \cdot h''(w) \cdot (r'(w)^2 + r(w)^2 + h'(w)^2) \\ &\quad - h'(w)^2 \cdot (r'(w) \cdot r''(w) + r(w) \cdot r'(w) + h'(w) \cdot h''(w)) = \\ &h'(w) \cdot h''(w) \cdot r(w)^2 - 2 \cdot r(w) \cdot r'(w) \cdot h'(w)^2 + r'(w) \cdot r''(w) \cdot r(w)^2 - 2 \cdot r(w) \cdot r'(w)^3 - r'(w) \cdot r(w)^3 \\ &= r(w) \cdot (r(w) \cdot h'(w) \cdot h''(w) - 2 \cdot r'(w) \cdot h'(w)^2 + r(w) \cdot r'(w) \cdot r''(w) \cdot r(w) - 2 \cdot r'(w)^3 - r'(w) \cdot r(w)^2) \end{aligned}$$

Zweite Gleichung :

$$0 = \frac{r'(w)}{|\overline{G'(w)}|} + \left(\frac{r(w)}{|\overline{G'(w)}|} \right)' = \frac{r'(w)}{|\overline{G'(w)}|} + \frac{|\overline{G'(w)}| \cdot r'(w) - |\overline{G'(w)}'| \cdot r(w)}{|\overline{G'(w)}|^2}, \text{ also}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \cdot r'(w) \cdot |\overline{G'(w)}|^2 - |\overline{G'(w)}'| \cdot |\overline{G'(w)}| \cdot r(w) = \\ &2 \cdot r'(w) \cdot (r'(w)^2 + r(w)^2 + h'(w)^2) - (r'(w) \cdot r''(w) + r(w) \cdot r'(w) + h'(w) \cdot h''(w)) \cdot r(w) = \\ &-r(w) \cdot h'(w) \cdot h''(w) + 2 \cdot r'(w) \cdot h'(w)^2 - r(w) \cdot r'(w) \cdot r''(w) + 2 \cdot r'(w)^3 + r'(w) \cdot r(w)^2 \quad \square \end{aligned}$$

Satz 3: : Es sei $f : x \rightarrow \ln\left(\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} + \frac{1}{x}\right) - \sqrt{1 - x^2}$ für $x \in J = (0;1]$ und F die davon erzeugte

Pseudosphäre. $w \rightarrow r(w)$, $w \in I$ sei eine zweimal differenzierbare Funktion von einem Intervall I (mit einer Breite > 0) aus Winkelgrößen in J. Dann induziert

$w \rightarrow r(w)$, $w \in I$ genau dann eine Geodäte auf F, wenn es (konstante) Zahlen $r_0 \in J$ und

$$w_0 \in \mathbf{R} \text{ gibt mit } r(w) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - (w - w_0)^2}} \text{ für alle } w \in I.$$

Beweis : Mit $h(w) := f(r(w))$ gilt $h'(w) = -\frac{r'(w) \cdot \sqrt{1 - r(w)^2}}{r(w)}$ und

$$h''(w) = \frac{-r(w) \cdot r''(w) \cdot (1 - r(w)^2) + r'(w)^2}{r(w)^2 \cdot \sqrt{1 - r(w)^2}}. \text{ Die Gleichung (*) von Satz 2 ist darum äquivalent}$$

$$\text{mit } \frac{r'(w) \cdot (-r(w) \cdot r''(w) + 3 \cdot r'(w)^2 + r(w)^4)}{r(w)^2} = 0, \text{ also mit}$$

$$r'(w) = 0 \text{ oder } -r(w) \cdot r''(w) + 3 \cdot r'(w)^2 + r(w)^4 = 0. (**)$$

Wenn es Zahlen $r_0 \in \mathbf{J}$ und $w_0 \in \mathbf{R}$ gibt mit $r(w) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - (w - w_0)^2}}$ für alle $w \in I$, dann ist

wegen $r'(w) = r(w)^3 \cdot (w - w_0)$ und $r''(w) = 3 \cdot r(w)^2 \cdot r'(w) \cdot (w - w_0) + r(w)^3$ diese Gleichung erfüllt. $w \rightarrow r(w)$, $w \in I$ induziert dann also eine Geodäte auf F .

Sei nun vorausgesetzt, dass $w \rightarrow r(w)$, $w \in I$ Geodäte ist, und es sei zunächst $r'(w) \neq 0$ für $w \in I$.

Für $d(w) := \frac{1}{r(w)^2}$ ist $r(w) = \frac{1}{\sqrt{d(w)}}$. Man errechnet durch Einsetzen in (**)

$-\frac{d''(w)+2}{2 \cdot d(w)^2} = 0$, also $d''(w) = -2$. Darum gibt es Zahlen $r_0 \in \mathbf{J}$ und $w_0 \in \mathbf{R}$ mit

$d(w) = \frac{1}{r_0^2} - (w - w_0)^2$ und $r(w) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - (w - w_0)^2}}$. Wegen $r'(w) = \frac{w - w_0}{\left(\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - (w - w_0)^2}\right)^3}$ ist

$r'(w)$ in dem Intervall I monoton, falls $r'(w) \neq 0$ für $w \in I$ gilt.

Wir betrachten nun den Fall, dass I eine Nullstelle von r' enthält. Dann ist es nicht möglich, dass es in I zwei Nullstellen gibt zwischen denen eine Nicht-Nullstelle von r' liegt, da dies der Monotonie von r' in Intervallen ohne Nullstellen widerspricht. Denn r' ist wegen der Differenzierbarkeit stetig. Wenn es also mehr als eine Nullstelle von r' in I gibt, dann müssen diese ein Intervall ausfüllen. Die Geodäte würde dann zum Teil auf einem Breitenkreis

verlaufen, in dessen Ebene die Ableitung des Vektors $\frac{\overline{G'(t)}}{|\overline{G'(t)}|}$ liegen würde. Da dieser

Ableitungsvektor dann nicht senkrecht zur Tangentialebene wäre, kann die Breite des Intervalls nicht größer als Null sein. Darum gibt es in I nur eine Nullstelle von r' . Auf Grund der Stetigkeit von r' muss der zur Nullstelle gehörige Punkt der Geodäte an einen Weg

anschließen, der durch den Term $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - (w - w_0)^2}}$ gegeben ist, und er muss dann der Punkt

zum Polarkoordinaten-Paar $(r_0; w_0)$ sein. □

Der maximale Definitionsbereich zum Geodäten-Term $r(w) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - (w - w_0)^2}}$ ergibt sich

aus $r(w) \in (0; 1] \Leftrightarrow \frac{1}{r_0^2} - (w - w_0)^2 \geq 1 \Leftrightarrow w_0 - \sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1} \leq w \leq w_0 + \sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1}$,

und es ist $-\sqrt{1 - r_0^2} \leq r_0 \cdot (w - w_0) \leq \sqrt{1 - r_0^2}$.

r_0 kann hier nicht gleich 1 sein, da sonst das Definitionsintervall die Breite Null hätte.

Das Definitionsintervall kann eine Breite $> 2\pi$ haben. Dann wird der Nullmeridian mehrfach gekreuzt.

Definition : Die von $w \rightarrow r(w) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - (w - w_0)^2}}$, $w_0 - \sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1} \leq w \leq w_0 + \sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1}$

mit $0 < r_0 < 1$ und $w_0 \in \mathbf{R}$ induzierte Geodäte auf der Pseudosphäre sei mit $[r_0 ; w_0]$ bezeichnet, die Geodäte des Meridians zum Winkel w_0 mit $[w_0]$.

Die Funktion $w \rightarrow (r(w) \cdot \cos(w); r(w) \cdot \sin(w); f(r(w)))$ bzw.

$r \rightarrow (r \cdot \cos(w_0); r \cdot \sin(w_0); f(r))$ nennen wir Standard-Geodätenfunktion von $[r_0 ; w_0]$ bzw. $[w_0]$. Mit $(r ; w)$ bezeichnen wir den Punkt $(r \cdot \cos(w); r \cdot \sin(w); f(r))$ der Pseudosphäre. $(r_0 ; w_0)$ wird Scheitelpunkt der Geodäte $[r_0 ; w_0]$ genannt.

Die eckigen Klammern signalisieren also, dass das Zahlenpaar keinen Punkt, sondern eine Geodäte beschreibt. Wenn man sich vorstellt, dass der Parameter w bzw. r bei den beiden Typen von Standard-Geodätenfunktionen proportional mit der Zeit größer wird, dann wird durch eine Geodätenfunktion eine Bewegung (im physikalischen Sinn, keine Kongruenzabbildung) definiert.

Die Geodäte $[r_0 ; w_0]$ ist (euklidisch) symmetrisch zur Meridianebene zum Winkel w_0 . Sie schneidet diese Ebene senkrecht in ihrem Scheitelpunkt $(r_0 ; w_0)$. Der Scheitelpunkt ist der Punkt auf ihr, der den kleinsten Abstand von der z-Achse hat.

Wenn man die Pseudosphäre durch eine Kugelfläche vom Radius 1 ersetzt, wird eine Geodäten, die keine Meridian-Geodäten ist, durch eine Funktion

$$\hat{w} \rightarrow \hat{r}(\hat{w}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{(\cos(\hat{w} - w_0))^2}{r_0^2} + (\sin(\hat{w} - w_0))^2}}, \hat{w} \in \mathbf{R} \text{ induziert, die im Unterschied zu ihrer}$$

Entsprechung bei der Pseudosphäre periodisch und für alle reelle Zahlen definiert ist.

Aus $r(w) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - (w - w_0)^2}}$ ergibt sich diese Funktion durch die Koordinatentransformation

$$w = \sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1} \cdot \sin(\hat{w} - w_0) + w_0. \text{ Wegen der Abhängigkeit von } r_0 \text{ und } w_0 \text{ ist diese}$$

Transformation allerdings für jede Geodäte verschieden.

Ersetzt man die Pseudosphäre durch einen Kegel, der durch z-Achsen-Rotation der Funktion $x \rightarrow a \cdot (1 - x)$, $x \in (0; 1]$ entsteht, dann wird eine Geodäten, die keine Meridian-Geodäten ist, durch eine Funktion

$$w \rightarrow \tilde{r}(w) = \frac{r_0}{\cos\left(\frac{w - w_0}{\sqrt{1 + a^2}}\right)}, w_0 - \sqrt{1 + a^2} \cdot \arccos(r_0) \leq w \leq w_0 + \sqrt{1 + a^2} \cdot \arccos(r_0) \text{ induziert.}$$

4. Winkel und Flächen

Die Abbildung 6 stellt einen geometrischen Zusammenhang zwischen Flächeninhalten und Winkelgrößen her, der für die hyperbolische Geometrie charakteristisch ist und sich an Hand der Pseudosphäre besonders gut darstellen lässt. Das dunkelblau umrandete Geodäten-Dreieck hat die Eckpunkte A, B und dem unendlich fernen Punkt U auf der z-Achse. Damit diese

Fläche eindeutig definiert ist, müssen wir voraussetzen, dass der Geodätenabschnitt zwischen A und B den Nullmeridian nicht kreuzt. (Diese Voraussetzung kann aber fallen, wenn wir in Abschnitt 7 die Riemann-Fläche der Pseudosphäre eingeführt haben.) Die Geodäten-Seiten AU und BU liegen auf Meridianen, davon AU auf dem Nullmeridian. AB liegt auf der Geodäte $[0,33 ; 0]$. Die Punkte A_S , B_S und U_S sind die Schnittpunkte der Parallelen zur z-Achse durch A, B und U mit der x-y-Ebene. U_S ist also der Koordinatenursprung. A_S hat die Polarkoordinaten $(0,33 ; 0)$ und B_S die Polarkoordinaten

$(w_B ; r(w_B))$ mit $r(w_B) = \frac{1}{\sqrt{0,33^2 - w_B^2}}$. Die an B angesetzten Pfeile stellen

Tangentenvektoren der Geodäten-Seiten durch B dar. Sie schließen den rot markierten Winkel β ein, der so groß ist wie der Innenwinkel des Dreiecks bei B.

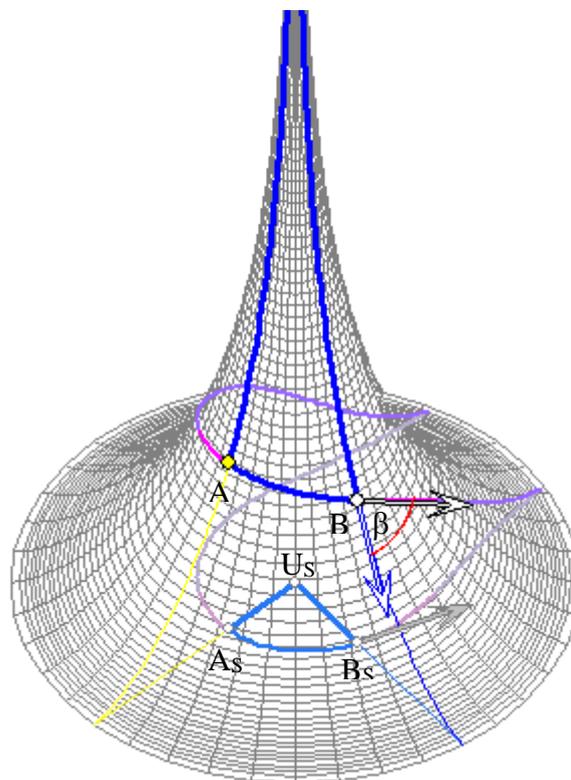


Abb.6

Überraschenderweise gibt es einen einfachen Zusammenhang zwischen dem Inhalt $|ABU|$ der dunkelblau umrandeten Fläche des Dreiecks und diesem Winkel β . Es ist nämlich $|ABU| = 0,5 \cdot \pi - \beta$. Das soll in Satz 5 gezeigt werden. Zur Orientierung beim Beweis dient die Abbildung 7, in welcher der rot markierte Winkel β die gleiche Größe hat wie der räumliche Winkel β in Abbildung 6, auch wenn dies wegen der perspektivischen Verzerrung anders erscheint. Die dunkelblau umrandete Fläche in Abbildung 7 hat die Größe $|ABU|$ des Geodäten-Dreiecks in Abbildung 6, wobei allerdings ein anderer Maßstab gewählt wurde. Sie ist die Fläche zwischen dem Graphen von $w \rightarrow r(w)$ und der Rechtsachse zwischen $w_A = 0$ und w_B . Hier wurde bemerkenswerterweise die Polarkoordinate w in Abbildung 6 zu einer kartesischen Koordinate in Abbildung 7. Außer dem Graphen von r ist der halbkreisförmige

Graph von $w \rightarrow \frac{1}{r(w)} = \sqrt{\frac{1}{0,33^2} - w^2}$ der Kehrwerte eingezeichnet. Der Winkel φ hat die Größe $\arcsin(0,33 \cdot w_B) = |\text{ABU}|$.

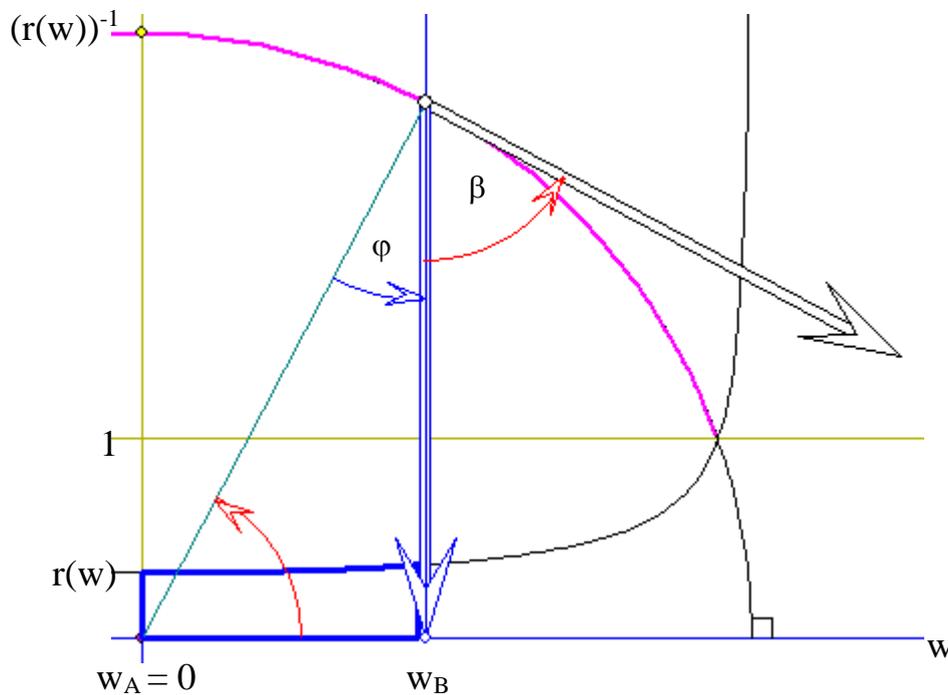


Abb. 7

Im Folgenden verstehen wir unter ‚Schattenpunkten‘, ‚Schattenkurven‘, ‚Schattenflächen‘ und ‚Schattenvektoren‘ Punkte, Kurven, Flächen und Vektoren in der x - y -Ebene, die durch Projektion parallel zur z -Achse entstehen. Wir bezeichnen diese Objekte mit dem Index S .

Statt bisher $w \rightarrow r(w)$ schreiben wir in Satz 4 $w \rightarrow \rho(w)$ um bei r eine Verwechslungen der Variablen- und der Funktions-Bezeichnung zu vermeiden. Der Funktionswert $\rho(w)$ gibt also in der x - y -Ebene einen Abstand vom Koordinaten-Ursprung $(0 ; 0 ; 0)$ an.

Definition : Gegeben sei eine differenzierbare Kurve $\rho : w \rightarrow \rho(w)$ und B ein Punkt auf der durch ρ induzierten Kurve K auf der Pseudosphäre. \vec{m} sei ein Tangentenvektor der Meridiangeodäte $[w_B]$ durch B , der zum Rand der Pseudosphäre zeigt. Unter dem Meridian-Schnittwinkel der Kurve in B der Kurve verstehen wir den Winkel, der zu der Drehung gehört, die \vec{m} links herum (von außerhalb der Pseudosphäre gesehen) in die Richtung eines Tangentenvektors von K in B überführt.

Satz 4 : Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $\rho : w \rightarrow \rho(w)$, $w \in I$ von einem Intervall I mit Bildern in $(0 ; 1]$. $B(r_B ; w_B)$ sei ein Punkt der durch ρ induzierten Kurve K auf der Pseudosphäre. \vec{t} sei ein Tangentenvektor von K in B , \vec{m} ein Tangentenvektor der Meridiangeodäte $[w_B]$ durch B , der zum Rand der Pseudosphäre zeigt, und \vec{n} ein Normalenvektor der Pseudosphäre im Punkt B , der senkrecht zur Fläche in den Außenraum der Pseudosphäre zeigt. Dann gilt:

1. \vec{n} schließt mit dem Vektor $(0 ; 0 ; 1)$ parallel zur z -Achse einen Winkel γ mit $\cos(\gamma) = r_B$ ein.

2. β sei der Meridian-Schnittwinkel $\sphericalangle(\vec{m}; \vec{t})$ und β_s der Winkel $\sphericalangle(\vec{m}_s; \vec{t}_s)$ zwischen den Schattenvektoren \vec{m}_s und \vec{t}_s .

$$\text{Dann ist } \tan(\beta_s) = \frac{\rho(w_B)}{\rho'(w_B)} \text{ und } \tan(\beta) = \tan(\beta_s) \cdot \cos(\gamma).$$

3. Es seien C und D zwei Punkte auf den Tangenten in B in Richtung \vec{m} und \vec{t} , und E ein Punkt, so dass BCDE ein Parallelogramm bildet. Zwischen den Flächeninhalten $|BCDE|$ bzw. $|B_s C_s D_s E_s|$ dieses Parallelogramms und des zugehörigen Schattenparallelogramms besteht der Zusammenhang

$$|B_s C_s D_s E_s| = |BCDE| \cdot \cos(\gamma) = |BC| \cdot r_B.$$

Beweis : 1. Da die Tangente an den Graphen von f in einem Punkt P die Hochachse in einem Punkt schneidet, der von P den Abstand 1 hat, ist $\cos(\gamma) = r_B$ (siehe Abb. 3).

2. Die Schattenkurve K_s wird in kartesischen Koordinaten durch $w \rightarrow (\rho(w) \cdot \cos(w); \rho(w) \cdot \sin(w))$ beschrieben. Die Ableitung ergibt den Tangentenvektor $(\rho'(w) \cdot \cos(w) - \rho(w) \cdot \sin(w); \rho'(w) \cdot \sin(w) + \rho(w) \cdot \cos(w)) = \rho'(w) \cdot (\cos(w); \sin(w)) + \rho(w) \cdot (-\sin(w); \cos(w))$. Dabei zeigt der Einheitsvektor $(\cos(w); \sin(w))$ in Richtung von \vec{m}_s , und $(-\sin(w); \cos(w))$ ist ein Einheitsvektor, der daraus durch eine 90° -Drehung links herum entsteht. Darum ist $\tan(\beta_s) = \frac{\rho(w_B)}{\rho'(w_B)}$.

Die Meridian-Ebene M_B durch den Punkt B steht senkrecht zur x-y-Ebene. Darum haben die Spitzen von \vec{t} und \vec{t}_s den gleichen Abstand von M_B , nämlich $|\vec{t}_s| \cdot \sin(\beta_s)$. Der Fußpunkt des Lots von der Spitze von \vec{t} auf M_B sei L genannt. Er hat von der Geraden BB_s den gleichen Abstand wie L_s , nämlich $|\vec{t}_s| \cdot \cos(\beta_s)$. Da die Tangentialebene durch B senkrecht zu M_B steht, ist $\sphericalangle B_s BL = 90^\circ - \gamma$. Darum ist $|\vec{t}_s| \cdot \cos(\beta_s) = |BL| \cdot \sin(90^\circ - \gamma) = |BL| \cdot \cos(\gamma)$. In dem Dreieck, das von B, L und der Spitze von \vec{t} gebildet wird ist

$$\tan(\beta) = \frac{|\vec{t}_s| \cdot \sin(\beta_s)}{|BL|} = \frac{|\vec{t}_s| \cdot \sin(\beta_s) \cdot \cos(\gamma)}{|\vec{t}_s| \cdot \cos(\beta_s)} = \tan(\beta_s) \cdot \cos(\gamma).$$

3. Da BC in der Meridian-Ebene M_B liegt und die senkrecht zur x-y-Ebene steht, haben die Geraden $B_s C_s$ und $D_s E_s$ den gleichen Abstand wie BC und DE. Wenn J der Fußpunkt des Lots von C auf die Gerade BB_s ist, gilt

$$|B_s C_s| = |JC| = |BC| \cdot \sin(90^\circ - \gamma) = |BC| \cdot \cos(\gamma) = |BC| \cdot r_B.$$

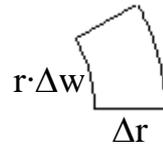
Daraus folgt die Behauptung 3. □

Satz 5 : Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $\rho : w \rightarrow \rho(w)$, $w \in [w_A; w_B]$ von einem Intervall $[w_A; w_B]$ der Breite $\leq 2\pi$ mit Bildern in $(0; 1]$. A und B seien die Punkte $(\rho(w_A); w_A)$ und $(\rho(w_B); w_B)$ auf der Pseudosphäre. Φ sei die Teilfläche der Pseudosphäre, die begrenzt wird von der durch ρ induzierten Kurve auf der Pseudosphäre zwischen A und B und den Abschnitten auf den Geodäten $[w_A]$ und $[w_B]$ zwischen A bzw. B und dem unendlich fernen Punkt U auf der z-Achse. Dann gilt:

1. Der Flächeninhalt von Φ ist $\int_{w_A}^{w_B} \rho(w)dw$.
2. Der Flächeninhalt der Pseudosphäre ist 2π .
3. Wenn $\rho(w) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - (w - w_0)^2}}$ ist, also zur Geodäte $[r_0 ; w_0]$ gehört, dann ist der

Flächeninhalt von Φ gleich $\arccos(r_0 \cdot (w_A - w_0)) - \arccos(r_0 \cdot (w_B - w_0))$. Dieser Winkel stimmt mit der Differenz der Meridian-Schnittwinkel $\alpha - \beta$ in den Punkten A und B überein.

Beweis : 1. Nach der 3. Behauptung von Satz 4 gibt es einen einfachen Zusammenhang zwischen den Flächeninhalten eines tangentialen Parallelogramms und des zugehörigen Schattenparallelogramms: man multipliziert mit dem Abstand des Berührungspunkts von der z-Achse. Sehr kleine tangentielle Parallelogramme haben näherungsweise den gleichen Inhalt wie die Fläche auf der Pseudosphäre, die durch Projektion des Parallelogramms parallel zur z-Achse auf die Pseudosphäre entsteht, wobei der Fehler gegen Null strebt, wenn die Seitenlängen gegen Null gehen. Der genannte Zusammenhang gilt also näherungsweise auch für kleine Flächen der Pseudosphäre. Dabei muss die Form sich nicht aus einem Parallelogramm ergeben, sondern kann auch aus einem Dreieck entstehen, das sich durch Halbierung des Parallelogramms ergibt, oder auch durch Zusammensetzung derartiger Dreiecke.



Wir betrachten jetzt ein kleines Flächenelement in der Form eines Ausschnitts aus einem Kreisring mit dem inneren Radius r , der inneren Bogenlänge $r \cdot \Delta w$ und der Breite Δr . Es hat den Flächeninhalt $r \cdot \Delta r \cdot \Delta w$. Für das dazu gehörige Flächenelement auf der Pseudosphäre mit dem Flächeninhalt $\Delta \Phi$ gilt dann näherungsweise $r \cdot \Delta \Phi = r \cdot \Delta r \cdot \Delta w$, also $\Delta \Phi = \Delta r \cdot \Delta w$. Bemerkenswerterweise fällt hier also der Faktor r weg. Durch Summation derartiger Flächeninhalte kann so Φ näherungsweise berechnet werden. Durch Integration ergibt sich

$$\text{exakt } \int_{w_A}^{w_B} \left(\int_0^{\rho(w)} dr \right) dw = \int_{w_A}^{w_B} \rho(w)dw .$$

2. Wenn man $w_A = 0$, $w_B = 2\pi$ und $\rho(w) = 1$ setzt, folgt die 2. Behauptung.

$$3. \text{ Der Flächeninhalt von } \Phi \text{ folgt aus } \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - (w - w_0)^2}} dw = \int \frac{r_0}{\sqrt{1 - r_0^2 \cdot (w - w_0)^2}} dw =$$

$$\arcsin(r_0 \cdot (w - w_0)) = 0,5 \cdot \pi - \arccos(r_0 \cdot (w - w_0)) .$$

Die Ableitung von $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - (w - w_0)^2}}$ ist $\rho'(w) = \frac{w - w_0}{\left(\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - (w - w_0)^2}\right)^3} = (w - w_0) \cdot (\rho(w))^3$.

Folglich gilt für den Meridian-Schnittwinkel im Punkt B nach Satz 4

$$\tan(\beta) = \tan(\beta_S) \cdot \rho(w_B) = \frac{\rho(w_B)}{(w_B - w_0) \cdot (\rho(w_B))^3} \cdot \rho(w_B) = \frac{1}{(w_B - w_0) \cdot \rho(w_B)} , \text{ also}$$

$$1 + (\tan(\beta))^2 = 1 + \frac{\frac{1}{r_0^2} - (w_B - w_0)^2}{(w_B - w_0)^2} = \frac{1}{r_0^2 \cdot (w_B - w_0)^2} \text{ und}$$

$$(\cos(\beta))^2 = \frac{1}{1 + (\tan(\beta))^2} = r_0^2 \cdot (w_B - w_0)^2. \text{ Analog ergibt sich } (\cos(\alpha))^2 = r_0^2 \cdot (w_A - w_0)^2.$$

Dabei stimmen die Vorzeichen von α bzw. β mit denen von $w_A - w_0$ bzw. $w_B - w_0$ überein.

Darum ist $\alpha - \beta = \arccos(r_0 \cdot (w_A - w_0)) - \arccos(r_0 \cdot (w_B - w_0))$. \square

Für $w_A = w_0 = 0$ und $r_0 = 0,33$ ergibt sich für den Flächeninhalt $\arcsin(0,33 \cdot w_B)$, stimmt also mit der Größe des Winkels φ in Abbildung 7 überein.

Die Abbildung 8 zeigt ein Geodäten-Dreieck mit den Eckpunkten A (blau), B (grün) und C (rot) mit Tangentialvektoren bei einem Umlauf gegen den Uhrzeigersinn. Bei dem Umlauf dreht sich die Bewegungsrichtung in B links herum von dem Vektor mit dem Meridian-Schnittwinkel β_1 in den mit dem Schnittwinkel β_2 . Entsprechend seien die Winkel α_1 und α_2 in A und γ_1 und γ_2 in C definiert. Die Fläche ABU zwischen der Geodäten-Seite AB und den beiden Meridian-Geodäten-Abschnitten UA und BU hat dann nach Satz 5 den Flächeninhalt

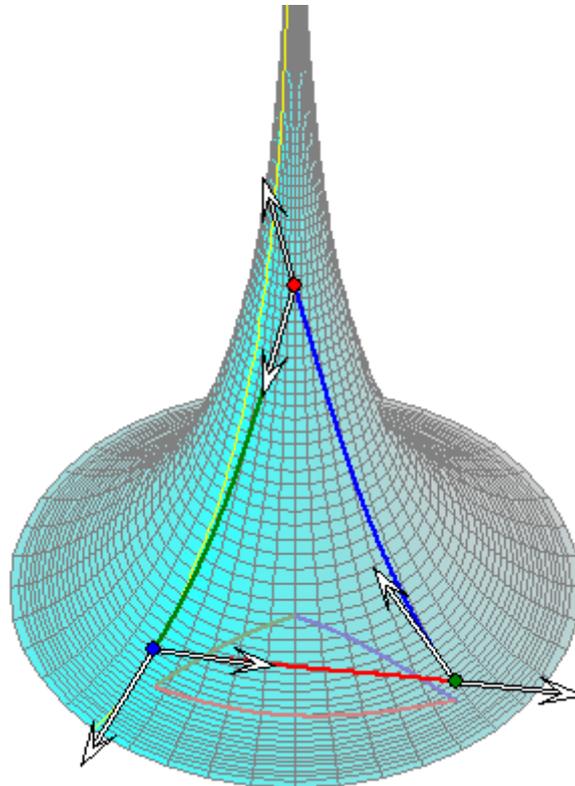


Abb. 8

$\alpha_2 - \beta_1$. Die entsprechende Fläche CBU hat den Inhalt $\gamma_1 - 180^\circ - (\beta_2 - 180^\circ) = \gamma_1 - \beta_2$ und ACU hat den Inhalt $\alpha_1 - 180^\circ - (\gamma_2 - 180^\circ) = \alpha_1 - \gamma_2$. Der Flächeninhalt des Dreiecks ist demnach $(\alpha_2 - \beta_1) - (\gamma_1 - \beta_2) - (\alpha_1 - \gamma_2) = (\alpha_2 - \beta_1) + (\beta_2 - \gamma_1) + (\gamma_2 - \alpha_1)$

$= (\alpha_2 - \alpha_1) + (\beta_2 - \beta_1) + (\gamma_2 - \gamma_1)$. Wenn man die Innenwinkel bei A, B und C mit positiven Zahlen α_{innen} , β_{innen} und γ_{innen} bezeichnet, ist $\alpha_2 - \alpha_1 = -\alpha_{\text{innen}} - 180^\circ$. α_1 hat nämlich einen Wert knapp unter 360° , weil dies die Größe des Meridian-Schnitt-Winkels des Vektors ist, der bei A nach links unten zeigt. Dagegen ist $\beta_2 - \beta_1 = 180^\circ - \beta_{\text{innen}}$ und $\gamma_2 - \gamma_1 = 180^\circ - \gamma_{\text{innen}}$.

Insgesamt ergibt sich für den Flächeninhalt des Dreiseits

$$-\alpha_{\text{innen}} - 180^\circ + 180^\circ - \beta_{\text{innen}} + 180^\circ - \gamma_{\text{innen}} = 180^\circ - \alpha_{\text{innen}} - \beta_{\text{innen}} - \gamma_{\text{innen}}.$$

Diese Zahl wird als Innenwinkel-Defekt bezeichnet. Sie ist in der euklidischen Geometrie gleich Null, in der hyperbolischen Geometrie aber größer als Null, da sie stets den Flächeninhalt angibt. Wenn man die Pseudosphäre durch eine Halbkugelfläche ersetzt, wird der Flächeninhalt eines Geodäten-Dreiseits durch $\alpha_{\text{innen}} + \beta_{\text{innen}} + \gamma_{\text{innen}} - 180^\circ$ berechnet.

5. Maß-Form

In diesem Abschnitt sollen Winkel und Längen bei Tangentenvektoren genauer untersucht werden.

Satz 6: $(r_0; w_0)$ sei ein Punkt der Geodäte $[r_1; w_1]$ auf der Pseudosphäre.

Sei $\vec{a} := (\cos(w_0); \sin(w_0); 0)$, $\vec{b} := (-\sin(w_0); \cos(w_0); 0)$ und $\vec{c} := (0; 0; 1)$.

1. Ein Normaleneinheitsvektor der Pseudosphäre im Punkt $(r_0; w_0)$ ist dann

$$\vec{n} := \sqrt{1-r_0^2} \cdot \vec{a} + r_0 \cdot \vec{c}.$$

2. Der Tangentenvektor der Standard-Geodätenfunktion der Meridian-Geodäte $[w_0]$ ist

$$\vec{a} - \sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1} \cdot \vec{c}, \text{ der Betrag davon } \frac{1}{r_0} \text{ und der Tangenteneinheitsvektor}$$

$$\vec{t}_0 = r_0 \cdot \vec{a} - \sqrt{1-r_0^2} \cdot \vec{c}.$$

3. Der Tangentenvektor der Standard-Geodätenfunktion von $[r_1; w_1]$ im Punkt $(r_0; w_0)$

$$\text{ist } r_0^3 \cdot (w_0 - w_1) \cdot \vec{a} + r_0 \cdot \vec{b} - r_0^2 \cdot \sqrt{1-r_0^2} \cdot (w_0 - w_1) \cdot \vec{c},$$

der Betrag davon $\frac{r_0^2}{r_1}$ und der Tangenteneinheitsvektor

$$\vec{t}_1 = r_1 \cdot r_0 \cdot (w_0 - w_1) \cdot \vec{a} + \frac{r_1}{r_0} \cdot \vec{b} - r_1 \cdot \sqrt{1-r_0^2} \cdot (w_0 - w_1) \cdot \vec{c}.$$

4. Das Skalarprodukt von \vec{t}_0 mit \vec{t}_1 ist $r_1 \cdot (w_0 - w_1)$, das Vektorprodukt $\vec{t}_0 \times \vec{t}_1$ ist $\frac{r_1}{r_0} \cdot \vec{n}$.

5. Wenn $[r_2; w_2]$ eine weitere Geodäte durch $(r_0; w_0)$ ist, dann ist das Skalarprodukt der Tangenteneinheitsvektoren \vec{t}_1 von $[r_1; w_1]$ und \vec{t}_2 von $[r_2; w_2]$ bei Zugrundelegung

der Standard-Geodätenfunktionen gleich $\frac{r_1 \cdot r_2}{r_0^2} + r_1 \cdot r_2 \cdot (w_0 - w_1) \cdot (w_0 - w_2)$. Das

Vektorprodukt $\vec{t}_1 \times \vec{t}_2$ ist $\frac{r_1 \cdot r_2}{r_0} \cdot (w_2 - w_1) \cdot \vec{n}$.

Beweis: 1. $\vec{a} + f'(r_0) \cdot \vec{c}$ ist ein Tangentenvektor in der Meridianebene des Punktes $(r_0; w_0)$,

folglich steht wegen $f'(r) = -\sqrt{\frac{1}{r^2} - 1}$ der Vektor $\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1} \cdot \vec{a} + \vec{c}$ mit dem Betrag $\frac{1}{r_0}$ senkrecht

zur Tangentialebene. Der Normaleneinheitsvektor ist darum $\vec{n} = \sqrt{1-r_0^2} \cdot \vec{a} + r_0 \cdot \vec{c}$.

2. Da auch der Tangentenvektor $\vec{a} - \sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1} \cdot \vec{c}$ den Betrag $\frac{1}{r_0}$ hat, ist der

Tangenteneinheitsvektor $\vec{t}_0 = r_0 \cdot \vec{a} - \sqrt{1 - r_0^2} \cdot \vec{c}$.

3. Die Ableitung der Standard-Geodätenfunktion $w \rightarrow (r(w) \cdot \cos(w); r(w) \cdot \sin(w); f(r(w)))$ ist $w \rightarrow (r'(w) \cdot \cos(w) - r(w) \cdot \sin(w); r'(w) \cdot \sin(w) + r(w) \cdot \cos(w); -r'(w) \cdot f'(r(w)))$, der Tangentenvektor im Punkt $(r_0; w_0)$ folglich

wegen $r'(w_0) = r(w_0)^3 \cdot (w_0 - w_1)$ und $f'(r_0) = -\frac{\sqrt{1 - r_0^2}}{r_0}$ gleich

$$r'(w_0) \cdot \vec{a} + r(w_0) \cdot \vec{b} - r'(w_0) \cdot f'(r(w_0)) \cdot \vec{c} = r_0^3 \cdot (w_0 - w_1) \cdot \vec{a} + r_0 \cdot \vec{b} - r_0^2 \cdot \sqrt{1 - r_0^2} \cdot (w_0 - w_1) \cdot \vec{c}.$$

Da \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} paarweise orthogonal sind, folgt für den Betrag

$$\sqrt{r_0^6 \cdot (w_0 - w_1)^2 + r_0^2 + r_0^4 \cdot (1 - r_0^2) \cdot (w_0 - w_1)^2} = r_0^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{r_0^2} + (w_0 - w_1)^2} = \frac{r_0^2}{r_1} \text{ und den}$$

Tangenteneinheitsvektor $r_1 \cdot r_0 \cdot (w_0 - w_1) \cdot \vec{a} + \frac{r_1}{r_0} \cdot \vec{b} - r_1 \cdot \sqrt{1 - r_0^2} \cdot (w_0 - w_1) \cdot \vec{c}$.

4. Das Skalarprodukt von \vec{t}_0 mit \vec{t}_1 ist folglich

$$r_0^4 \cdot (w_0 - w_1) + r_0^2 \cdot (1 - r_0^2) \cdot (w_0 - w_1) = r_0^2 \cdot (w_0 - w_1) \text{ und das Vektorprodukt}$$

$$r_0 \cdot \sqrt{1 - r_0^2} \cdot \vec{a} + \left(r_0^3 \cdot \sqrt{1 - r_0^2} \cdot (w_0 - w_1) - r_0^3 \cdot \sqrt{1 - r_0^2} \cdot (w_0 - w_1) \right) \cdot \vec{b} + r_0^2 \cdot \vec{c} = r_0 \cdot \vec{n}.$$

5. Das Skalarprodukt von \vec{t}_1 mit \vec{t}_2 ist

$$r_1 \cdot r_0 \cdot (w_0 - w_1) \cdot r_2 \cdot r_0 \cdot (w_0 - w_2) + \frac{r_1}{r_0} \cdot \frac{r_2}{r_0} + r_1 \cdot \sqrt{1 - r_0^2} \cdot (w_0 - w_1) \cdot r_2 \cdot \sqrt{1 - r_0^2} \cdot (w_0 - w_2) =$$

$$\frac{r_1 \cdot r_2}{r_0^2} + r_1 \cdot r_2 \cdot (w_0 - w_1) \cdot (w_0 - w_2).$$

Das Vektorprodukt ist

$$\left(-\frac{r_1 \cdot r_2}{r_0} \cdot \sqrt{1 - r_0^2} \cdot (w_0 - w_2) + \frac{r_1 \cdot r_2}{r_0} \cdot \sqrt{1 - r_0^2} \cdot (w_0 - w_1) \right) \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} +$$

$$(r_1 \cdot r_2 \cdot (w_0 - w_1) - r_1 \cdot r_2 \cdot (w_0 - w_2)) \cdot \vec{c}$$

$$= \frac{r_1 \cdot r_2}{r_0} \cdot \sqrt{1 - r_0^2} \cdot (w_2 - w_1) \cdot \vec{a} + r_1 \cdot r_2 \cdot (w_2 - w_1) \cdot \vec{c} = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_0} \cdot (w_2 - w_1) \cdot \vec{n}. \quad \square$$

Definition : Zu jedem Punkt P der Pseudosphäre sei eine Funktion μ_p definiert, die jedem Paar von Tangentenvektoren $(\vec{t}_1; \vec{t}_2)$ das Zahlenpaar $(|\vec{t}_1| \cdot |\vec{t}_2| \cdot \cos(\alpha); |\vec{t}_1| \cdot |\vec{t}_2| \cdot \sin(\alpha))$ zuordnet, wobei $|\vec{t}_i|$ die euklidische Vektorlänge ist und α die euklidische Winkelgröße zwischen den beiden Vektoren. Wir nennen diese Funktion ‚Maß-Form zu P‘. Das Zahlenpaar

$(\cos(\alpha); \sin(\alpha))$, das sich durch Division mit $|\vec{t}_1| \cdot |\vec{t}_2|$ ergibt, nennen wir „normierten Maß-Form-Wert zu $(\vec{t}_1; \vec{t}_2)$ “,

Die erste Komponente $|\vec{t}_1| \cdot |\vec{t}_2| \cdot \cos(\alpha)$ gibt das Skalarprodukt der beiden Vektoren an, die zweite die aus beiden gebildete Determinante. μ_P ist symmetrisch in der ersten Komponente, da die Vertauschung von \vec{t}_1 und \vec{t}_2 zwar zur Änderung des Vorzeichens von α führt, aber $\cos(\alpha)$ unverändert lässt, und antimetrisch in der zweiten Komponente, da $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ gilt. Der Betrag der zweiten Komponente kann aus der ersten durch

$|\vec{t}_1| \cdot |\vec{t}_2| \cdot \sqrt{1 - (\cos(\alpha))^2} = \sqrt{|\vec{t}_1|^2 \cdot |\vec{t}_2|^2 - (|\vec{t}_1| \cdot |\vec{t}_2| \cdot \cos(\alpha))^2}$ berechnet werden, nicht jedoch das Vorzeichen.

Zur Berechnung der Maß-Form-Werte ist es nützlich, auch für die Tangentenvektoren Polarkoordinaten einzuführen. Dazu betrachten wir die Abbildung $\tau \rightarrow (r(\tau); w(\tau))$ von einem Intervall $I \subseteq \mathbf{R}$ in die Menge der durch Polarkoordinaten angegebenen Punkte der Pseudosphäre. Sei P_0 der Punkt $(r(\tau_0); w(\tau_0))$ mit $\tau_0 \in I$, abgekürzt $(r_0; w_0)$. Die Werte der Ableitungen der Komponentenfunktionen $r(\tau)$ und $w(\tau)$ für τ_0 seien mit $r' = r'(\tau_0)$ und $w' = w'(\tau_0)$ abgekürzt. Wenn man die Basisvektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} wie in Satz 6 benutzt,

ergibt sich als Tangentenvektor $r' \cdot \vec{a} + r_0 \cdot w' \cdot \vec{b} - r' \cdot \sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1} \cdot \vec{c}$. Da $(r'; w')$ diesen Vektor bei

Vorgabe von $(r_0; w_0)$ eindeutig bestimmt, betrachten wir $(r'; w')$ als Polarkoordinaten-Paar des Vektors. Wenn wir mehrere Tangentenvektoren bei P_0 betrachten, benutzen wir auch die Bezeichnungen $(r'_0; w'_0)$, $(r'_1; w'_1)$ und $(r'_2; w'_2)$.

In dem folgenden Satz wiederholen wir zum Teil Ergebnisse aus Satz 6 in einer Formulierung mit der Maß-Form.

Satz 7 : P mit den Polarkoordinaten $(r_0; w_0)$ sei ein Punkt auf der Pseudosphäre.

1. Für Tangentenvektoren $(r'_1; w'_1)$ und $(r'_2; w'_2)$ in P ist der Maß-Form-Wert

$$\mu_P((r'_1; w'_1); (r'_2; w'_2)) = \left(\frac{r'_1 \cdot r'_2}{r_0^2} + r_0^2 \cdot w'_1 \cdot w'_2 ; r'_1 \cdot w'_2 - r'_2 \cdot w'_1 \right).$$

2. Geodäten $[w_0]$ und $[r_1; w_1]$, die sich im Punkt $(r_0; w_0)$ unter einem Meridian-Schnitt-Winkel mit der Größe α schneiden, haben im Schnittpunkt bei Verwendung der Standard-Geodätenfunktionen Tangentenvektoren mit den Polarkoordinaten-Paaren $(r'_0; w'_0) = (1; 0)$ und $(r'_1; w'_1) = (r_0^3 \cdot (w_0 - w_1) ; 1)$ dem Maß-Form-Wert $\mu_P((r'_0; w'_0); (r'_1; w'_1)) = (r_0 \cdot (w_0 - w_1) ; 1)$ und dem

$$\text{normierten Maß-Form-Wert } \left(r_1 \cdot (w_0 - w_1); \frac{r_1}{r_0} \right) = (\cos(\alpha); \sin(\alpha)).$$

3. Geodäten $[r_1; w_1]$ und $[r_2; w_2]$, die sich im Punkt $(r_0; w_0)$ unter einem Winkel mit der Größe γ schneiden, haben im Schnittpunkt bei Verwendung der Standard-Geodätenfunktionen den Maß-Form-Wert

$$\mu_P((r'_1; w'_1); (r'_2; w'_2)) = (r_0^4 \cdot (w_0 - w_1) \cdot (w_0 - w_2) + r_0^2; r_0^3 \cdot (w_2 - w_1)).$$

Der zugehörige normierte Maß-Form-Wert ist

$$\left(\frac{r_1 \cdot r_2}{r_0^2} + r_1 \cdot r_2 \cdot (w_0 - w_1) \cdot (w_0 - w_2); \frac{r_1 \cdot r_2}{r_0} \cdot (w_2 - w_1) \right) = (\cos(\gamma); \sin(\gamma)).$$

Beweis : 1. Mit den Bezeichnungen \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} und \vec{n} wie in Satz 6 ist

$$(r'_1; w'_1) = r'_1 \cdot \vec{a} + r_0 \cdot w'_1 \cdot \vec{b} - r'_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1} \cdot \vec{c} \quad \text{und} \quad (r'_2; w'_2) = r'_2 \cdot \vec{a} + r_0 \cdot w'_2 \cdot \vec{b} - r'_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1} \cdot \vec{c}. \quad \text{Das}$$

Skalarprodukt ist $r'_1 \cdot r'_2 + r_0^2 \cdot w'_1 \cdot w'_2 + r'_1 \cdot r'_2 \cdot \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) = \frac{r'_1 \cdot r'_2}{r_0^2} + r_0^2 \cdot w'_1 \cdot w'_2$ und das Vektorprodukt

$$\left(-r_0 \cdot w'_1 \cdot r'_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1} + r_0 \cdot w'_2 \cdot r'_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1} \right) \cdot \vec{a} + \left(-r'_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1} \cdot r'_2 + r'_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1} \cdot r'_1 \right) \cdot \vec{b} + (r'_1 \cdot r_0 \cdot w'_2 - r'_2 \cdot r_0 \cdot w'_1) \cdot \vec{c} = (r'_1 \cdot w'_2 - r'_2 \cdot w'_1) \cdot (\sqrt{1 - r_0^2} \cdot \vec{a} + r_0 \cdot \vec{c}).$$

Dabei ist $\sqrt{1 - r_0^2} \cdot \vec{a} + r_0 \cdot \vec{c}$ der Normaleneinheitsvektor in P.

2.,3. $(r'_0; w'_0) = 1 \cdot \vec{a} + r_0 \cdot 0 \cdot \vec{b} - 1 \cdot \sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1} \cdot \vec{c}$ gleich (1;0) in Polarkoordinaten.

Entsprechend ergibt sich das Polarkoordinaten-Paar $(r_0^3 \cdot (w_0 - w_1); 1)$ aus

$$(r'_1; w'_1) = r_0^3 \cdot (w_0 - w_1) \cdot \vec{a} + r_0 \cdot 1 \cdot \vec{b} - r_0^3 \cdot (w_0 - w_1) \cdot \sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1} \cdot \vec{c}. \quad \text{Der Rest ergibt sich durch}$$

Einsetzen oder aus Satz 6. □

Die Aussage über den Winkel γ in der 3. Behauptung hätte man auch mit Hilfe der Regel $(\cos(\beta - \alpha); \sin(\beta - \alpha)) = (\cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) + \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha); \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) - \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha))$ berechnen können, da γ die Differenz der Schnittwinkel der Geodäten $(r'_1; w'_1)$ und $(r'_2; w'_2)$ mit der Geodäte $[w_0]$ ist.

6. Riemann-Fläche

Abbildung 5 zeigt einen Aspekt der Geodäten, den man als nachteilig ansehen kann, dass nämlich zwei verschiedene Punkte unendlich viele Verbindungs-Geodäten haben. Sie unterscheiden sich durch die Windungszahl, das heißt die Anzahl der vollen Umläufe um die z-Achse. Man kann diesen Mangel beheben, indem man jeden Punkt P der Pseudosphäre ersetzt durch unendlich viele Punkte am gleichen Ort, die man mit ganzen Zahlen durchnummeriert und durch ein Paar (P;n) mit ganzzahligem n beschreibt. Alle Paare mit gleichem n bilden dann eine Schicht (oder ein Blatt) der Riemann-Fläche der Pseudosphäre, die nach Bernhard Riemann (1826-1866) benannt wurde. Die Punkte der n-ten Schicht werden im Folgenden durch das Polarkoordinaten-Paar $(r; w)$ mit $0 < r \leq 1$ und $2\pi \cdot n \leq w < 2\pi \cdot (n+1)$ beschrieben, zu dem das kartesische Koordinatentripel $(r \cdot \cos(w); r \cdot \sin(w); f(r))$ den zugehörigen Punkt der Pseudosphäre angibt. Die n-te Schicht geht am gelb-grau gezeichneten Nullmeridian beim Übergang zum Winkel

$w = 2\pi + 2\pi \cdot n = 2\pi \cdot (n + 1)$ in die Schicht mit der Nummer $n+1$ über. Dabei liegen die einzelnen Schichten spiralförmig aufeinander, jedoch unterscheiden sich die Orte übereinanderliegender Punkte verschiedener Schichten nicht.

Bei der Beschreibung eines Punktes der Riemann-Fläche durch ein Polarkoordinaten-Paar $(r ; w)$ ist wichtig zu bedenken, dass die Winkelgröße $2\pi = 360^\circ$ nicht wie üblich mit 0° identifiziert wird. Wenn P und Q zwei Punkte der Pseudosphäre sind, die durch eine Geodäte mit der Windungszahl k verbunden sind, dann ordnet man P und Q zwei Schichten zu, deren Nummern sich um k unterscheiden.

Wir fassen die Übertragung der Begriffe zusammen:

Definition : Die Punktmenge der Riemann-Fläche der Pseudosphäre ist die Menge der Paare $(P ; n)$, wobei P ein Punkt der Pseudosphäre ist und n eine ganze Zahl. Das zu $(P ; n)$ gehörige Polarkoordinaten-Paar ist das Paar $(r ; w)$, wobei $(r \cdot \cos(w); r \cdot \sin(w); f(r))$ das kartesische Koordinaten-Tripel von P ist und $n = \text{floor}\left(\frac{w}{2\pi}\right)$ die ganze Zahl mit $2\pi \cdot n \leq w < 2\pi \cdot (n + 1)$.

Zu Zahlen r_0 mit $0 < r_0 < 1$ und $w_0 \in \mathbf{R}$ werden Standard-Geodätenfunktionen mit Bildpunkten in der Riemann-Fläche induziert durch

$$w \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - (w - w_0)^2}} ; w \right), w_0 - \sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1} \leq w \leq w_0 + \sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1},$$

und auf Meridianen durch $r \rightarrow (r, w_0), 0 < r \leq 1$. Die Bildmengen dieser Funktionen heißen Geodäten der Riemann-Fläche und werden mit $[r_0 ; w_0]$ bzw. $[r_0]$ bezeichnet. Manchmal nennen wir auch zusammenhängende Teilmengen hiervon Geodäten. Die Begriffe ‚Länge einer Geodäte‘ und ‚Größe des Winkels zwischen zwei Geodäten‘ werden mit Hilfe der Projektion $(P; n) \rightarrow P$ von der Pseudosphäre auf die Riemann-Fläche übertragen.

Der folgende Hilfssatz wird in Satz 8 mit $s_0 = \frac{1}{r_0}$, $s_1 = \frac{1}{r_1}$ und $s_2 = \frac{1}{r_2}$ benutzt, im nächsten Abschnitt aber auch für die Kehrwerte s_i selbst.

Hilfssatz 1 : Sei $w_1 \neq w_2$. f_0, f_1 und f_2 seien Zahlen in $\{1; -1\}$ (Vorzahl-Faktoren).

1. Aus $(w_0 - w_1)^2 = f_0 \cdot s_0^2 + f_1 \cdot s_1^2$ und $(w_0 - w_2)^2 = f_0 \cdot s_0^2 + f_2 \cdot s_2^2$ (*)

$$\text{folgt } w_0 = \frac{-f_1 \cdot s_1^2 + f_2 \cdot s_2^2 + w_1^2 - w_2^2}{2 \cdot (w_1 - w_2)}$$

$$\text{und } s_0^2 = \frac{f_0 \cdot ((f_1 \cdot s_1^2 + f_2 \cdot s_2^2 - (w_1 - w_2)^2)^2 - 4 \cdot f_1 \cdot s_1^2 \cdot f_2 \cdot s_2^2)}{4 \cdot (w_1 - w_2)^2}, \text{ und umgekehrt.}$$

2. Die Gleichung $s_0^2 = (w_0 - w_1) \cdot (w_2 - w_0)$ ist äquivalent damit, dass Zahlen s_1 und s_2 existieren mit $(w_0 - w_1)^2 = -s_0^2 + s_1^2$, $(w_0 - w_2)^2 = -s_0^2 + s_2^2$ und $(w_2 - w_1)^2 = s_1^2 + s_2^2$.

$$\text{Falls dies gilt, ist } s_0^2 = \frac{s_1^2 \cdot s_2^2}{(w_2 - w_1)^2} \text{ und } w_0 = w_1 + \frac{s_1^2}{(w_2 - w_1)}.$$

Beweis : 1. Aus $(w_0 - w_1)^2 = f_0 \cdot s_0^2 + f_1 \cdot s_1^2$ und $(w_0 - w_2)^2 = f_0 \cdot s_0^2 + f_2 \cdot s_2^2$ folgt durch Subtraktion $-2 \cdot w_0 \cdot (w_1 - w_2) + w_1^2 - w_2^2 = (w_0 - w_1)^2 - (w_0 - w_2)^2 = f_1 \cdot s_1^2 - f_2 \cdot s_2^2$ und daraus $w_0 = \frac{-f_1 \cdot s_1^2 + f_2 \cdot s_2^2 + w_1^2 - w_2^2}{2 \cdot (w_1 - w_2)}$. Wegen $f_0^2 = 1$ ergibt sich durch Einsetzen in die erste

$$\text{Gleichung } s_0^2 = f_0 \cdot \left(\left(\frac{-f_1 \cdot s_1^2 + f_2 \cdot s_2^2 + w_1^2 - w_2^2}{2 \cdot (w_1 - w_2)} - w_1 \right)^2 - f_1 \cdot s_1^2 \right) \\ = \frac{f_0 \cdot ((f_1 \cdot s_1^2 + f_2 \cdot s_2^2 - (w_1 - w_2)^2)^2 - 4 \cdot f_1 \cdot s_1^2 \cdot f_2 \cdot s_2^2)}{4 \cdot (w_1 - w_2)^2}.$$

Diese Argumentation kann auch umgekehrt werden.

2. Sei zunächst $w_2 > w_1$. Deutet man $q = w_0 - w_1$, $p = w_2 - w_0$ und $h = s_0$ als

Höhenabschnitte und Höhe in einem Dreieck, so bedeutet die Gleichung

$$s_0^2 = (w_0 - w_1) \cdot (w_2 - w_0), \text{ dass das Dreieck mit den Seitenlängen } a = \sqrt{s_0^2 + (w_2 - w_0)^2},$$

$b = \sqrt{s_0^2 + (w_0 - w_1)^2}$ und $c = w_2 - w_1$ rechtwinklig ist. Sei $s_1 := b$ und $s_2 := a$. Dann folgt

$$(w_0 - w_1)^2 = -s_0^2 + s_1^2, \quad (w_0 - w_2)^2 = -s_0^2 + s_2^2 \text{ und } (w_2 - w_1)^2 = s_1^2 + s_2^2.$$

Wenn umgekehrt $(w_0 - w_1)^2 = -s_0^2 + s_1^2$, $(w_0 - w_2)^2 = -s_0^2 + s_2^2$ und

$(w_2 - w_1)^2 = s_1^2 + s_2^2$ vorausgesetzt wird, dann ist das Dreieck mit den Seitenlängen $a = s_2$,

$b = s_1$ und $c = w_2 - w_1$ ebenfalls rechtwinklig und man kann mit dem Höhensatz

$$s_0^2 = (w_0 - w_1) \cdot (w_2 - w_0) \text{ folgern. Da nach dem Kathetensatz } q = \frac{b^2}{c} \text{ und } p = \frac{a^2}{c} \text{ gilt, folgt}$$

$$s_0^2 = h^2 = q \cdot p = \frac{b^2}{c} \cdot \frac{a^2}{c} = \frac{s_1^2 \cdot s_2^2}{(w_2 - w_1)^2} \text{ und } w_0 - w_1 = q = \frac{b^2}{c} = \frac{s_1^2}{w_2 - w_1}.$$

Der Fall $w_2 < w_1$ ergibt sich aus $w_2 > w_1$ durch einen Vorzeichenwechsel. □

Die in dem Beweis der 2. Behauptung hergestellte Verbindung mit den Satz von Pythagoras führt zu einem Zusammenhang zwischen der Pseudosphäre und dem Poincare-Modell, das im nächsten Abschnitt dargestellt wird.

Satz 8 : Die Riemann-Fläche der Pseudosphäre hat folgende Eigenschaften:

1. Ein Punkt $(r ; w)$ der Riemann-Fläche liegt auf der Geodäte $[r_0 ; w_0]$ genau dann, wenn $(w_0 - w)^2 = \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}$ gilt. Er liegt auf $[w_0]$ genau dann wenn $w = w_0$.
2. Verschiedene Punkte $(r_1 ; w_1)$ und $(r_2 ; w_2)$ liegen gemeinsam auf genau einer Geodäte.
3. Verschiedene Geodäten haben höchstens einen Schnittpunkt auf der Riemann-Fläche.
4. Wenn $[r_1 ; w_1]$ von der Geodäte $[r_2 ; w_2]$ senkrecht im Punkt $(r_0 ; w_0)$ geschnitten

wird, dann ist $\frac{1}{r_0^2} = (w_0 - w_1) \cdot (w_2 - w_0)$, $(w_2 - w_1)^2 = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}$ und der

$$\text{Schnittpunkt } (r_0 ; w_0) = \left(r_1 \cdot r_2 \cdot |w_2 - w_1| ; w_1 + \frac{1}{r_1^2 \cdot (w_2 - w_1)} \right).$$

Wenn $[r_1 ; w_1]$ und $[r_2 ; w_2]$ einen Schnittpunkt haben, dann folgt aus

$\frac{1}{r_0^2} = (w_0 - w_1) \cdot (w_2 - w_0)$, dass die beiden Geodäten sich senkrecht schneiden.

Eine Meridian-Geodäten $[w_2]$ schneidet $[r_1; w_1]$ genau dann senkrecht, wenn $w_1 = w_2$ gilt. Der einzige Schnittpunkt ist dann $(r_1; w_1)$.

5. Zu der Geodäte $[r_1; w_1]$ und dem Punkt $(r_2; w_2)$ gibt es höchstens ein Lot, d. h. eine Geodäte durch $(r_2; w_2)$, die $[r_1; w_1]$ senkrecht schneidet.
6. Zu verschiedenen Geodäten $[r_1; w_1]$ und $[r_2; w_2]$ gibt es höchstens eine Geodäte $[r_0; w_0]$, die sowohl $[r_1; w_1]$ als auch $[r_2; w_2]$ senkrecht schneidet.
7. Die Weglänge zwischen den Punkten $(r_0; w_0)$ und $(r; w)$ auf $[r_0; w_0]$ beträgt

$$0,5 \cdot \left| \ln \frac{\frac{1}{r_0} + (w - w_0)}{\frac{1}{r_0} - (w - w_0)} \right|, \text{ die zwischen } (r_0; w_0) \text{ und } (r; w_0) \text{ auf } [w_0] \left| \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right|.$$

Beweis : 1. ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Standard-Geodätenfunktion.

2. Wenn die verschiedenen Punkte $(r_1; w_1)$ und $(r_2; w_2)$ mit $w_1 \neq w_2$ gemeinsam auf der Geodäte $[r_0; w_0]$ liegen, gilt die Bedingung (*) in Hilfssatz 1 mit $f_0 = 1$ und $f_1 = f_2 = -1$.

Darum gibt es höchstens eine Verbindungs-Geodäte. Da $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r_1^2} + (w_0 - w_1)^2}} < 1$ existiert sie

auch immer. Im Fall $w_1 = w_2$ ist $[w_1]$ die einzige Verbindungs-Geodäte.

3. Wenn Geodäten $[r_1; w_1]$ und $[r_2; w_2]$ sich im Punkt $(r_0; w_0)$ schneiden, dann gilt die Bedingung (*) in Hilfssatz 1 mit $f_0 = -1$ und $f_1 = f_2 = 1$. r_0 und w_0 sind demnach eindeutig bestimmt. Allerdings ist möglicherweise $r_0 > 1$, also $(r_0; w_0)$ kein Punkt der Pseudosphäre. Wenn $[r_1; w_1]$ von einer Geodäte $[w_2]$ in $(r_0; w_0)$ geschnitten wird, folgt $w_0 = w_2$ und

$$r_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r_1^2} - (w_2 - w_1)^2}}.$$

4. Wenn $[r_2; w_2]$ die Geodäte $[r_1; w_1]$ senkrecht im Punkt $(r_0; w_0)$ schneidet, dann folgt aus

Satz 6 $\frac{r_1 \cdot r_2}{r_0^2} + r_1 \cdot r_2 \cdot (w_0 - w_1) \cdot (w_0 - w_2) = 0$, folglich $\frac{1}{r_0^2} = (w_0 - w_1) \cdot (w_2 - w_0)$. Nach der

zweiten Behauptung von Hilfssatz 1 folgt dann der Term für $(r_0; w_0)$.

Wenn $[r_1; w_1]$ und $[r_2; w_2]$ einen Schnittpunkt haben, dann folgt aus

$\frac{1}{r_0^2} = (w_0 - w_1) \cdot (w_2 - w_0)$ mit Satz 6, dass die beiden Geodäten sich senkrecht schneiden.

Eine Meridian-Geodäten $[w_2]$ schneidet $[r_1 ; w_1]$ genau dann senkrecht, wenn die der Graph

der Funktion $w \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r_1^2} - (w - w_1)^2}} ; w \right)$ in der r - w -Ebene die Ursprungsgerade $w = w_2$

senkrecht schneidet. Das ist genau für $w_1 = w_2$ der Fall.

5. Wenn $[r_0 ; w_0]$ Lot von $(r_2 ; w_2)$ auf die Geodäte $[r_1 ; w_1]$ ist, gilt (*) in Hilfssatz 1 mit $f_0 = 1, f_1 = 1$, und $f_2 = -1$, so dass r_0 und w_0 eindeutig bestimmt sind, aber möglicherweise mit $r_0 > 1$.

6. Wenn $[r_0 ; w_0]$ beide Geodäten $[r_1 ; w_1]$ und $[r_2 ; w_2]$ senkrecht schneidet, dann folgt daraus nach 4. $(w_0 - w_1)^2 = \frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r_1^2}$ und $(w_0 - w_2)^2 = \frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r_2^2}$, so dass (*) mit $f_0 = f_1 = f_2 = 1$ anwendbar ist.

7. Der Tangentenvektor der Standard-Geodätenfunktion von $[r_0 ; w_0]$ im Punkt

$(r ; w)$ hat nach Satz 6 den Betrag $\frac{r^2}{r_0} = \frac{1}{r_0} \frac{1}{\frac{1}{r_0^2} - (w - w_0)^2} = \frac{0,5}{\frac{1}{r_0} + (w - w_0)} + \frac{0,5}{\frac{1}{r_0} - (w - w_0)}$. Die

Länge des Wegs von $(r_0 ; w_0)$ nach $(r ; w)$ ist darum der Betrag von

$$\int_{w_0}^w \frac{r(w)^2}{r_0} dw = 0,5 \cdot \ln \left(\frac{1}{r_0} + (w - w_0) \right) - 0,5 \cdot \ln \left(\frac{1}{r_0} - (w - w_0) \right) = 0,5 \cdot \ln \frac{\frac{1}{r_0} + (w - w_0)}{\frac{1}{r_0} - (w - w_0)}.$$

Die Ableitung von der Traktix-Funktion f ist $f'(r) = -\sqrt{\frac{1}{r^2} - 1}$. Der Tangentenvektor der

Standard-Geodätenfunktion von $[w_0]$ im Punkt $(r ; w)$ hat darum die Länge $\sqrt{1 + f'(r)^2} = \frac{1}{r}$.

Die Länge des Wegs von $(r_0 ; w_0)$ nach $(r ; w_0)$ ist folglich der Betrag von $\int_{r_0}^r \frac{1}{r} dr = \ln \frac{r}{r_0}$. \square

Dass die Geometrie der Pseudosphäre nicht euklidisch ist zeigt die 6. Behauptung von Satz 7 am deutlichsten, denn sie steht im Widerspruch zu der Eigenschaft der euklidischen Geometrie, dass in einem Viereck mit drei rechten Winkeln notwendig auch der vierte Winkel ein rechter sein muss. Dies hatte Saccheri als Ersatz für das Parallelen-Axiom gesehen. Die Möglichkeit, auf der Pseudosphäre zwei Punkte durch verschiedene Geodäten zu verbinden, wurde durch die Einführung der Riemann-Fläche beseitigt und damit eine Annäherung an die euklidische Geometrie erreicht. Überraschenderweise gelten für Geodäten der Pseudosphäre auch viele der bekannten Dreiecks-Sätze. Die Abbildung 9 zeigt dies am Beispiel des Schnitts der drei Höhen im Dreieck. Jede der Höhen-Geodäten schneidet die zugehörige Dreieckseiten-Geodäte rechtwinklig, bei Verwendung des euklidischen Winkelmaßes im Raum. Es kommt aber vor, dass durch einem Dreiecks-Eckpunkt keine Geodäte existiert, welche die gegenüberliegende Geodäten-Seite senkrecht schneidet. Wenn die drei Höhen-Geodäten existieren und sich zwei der Höhen-Geodäten schneiden, dann geht wie im

Geraden-Dreiseit der euklidischen Geometrie auch die dritte Höhen-Geodäte durch den Schnittpunkt.

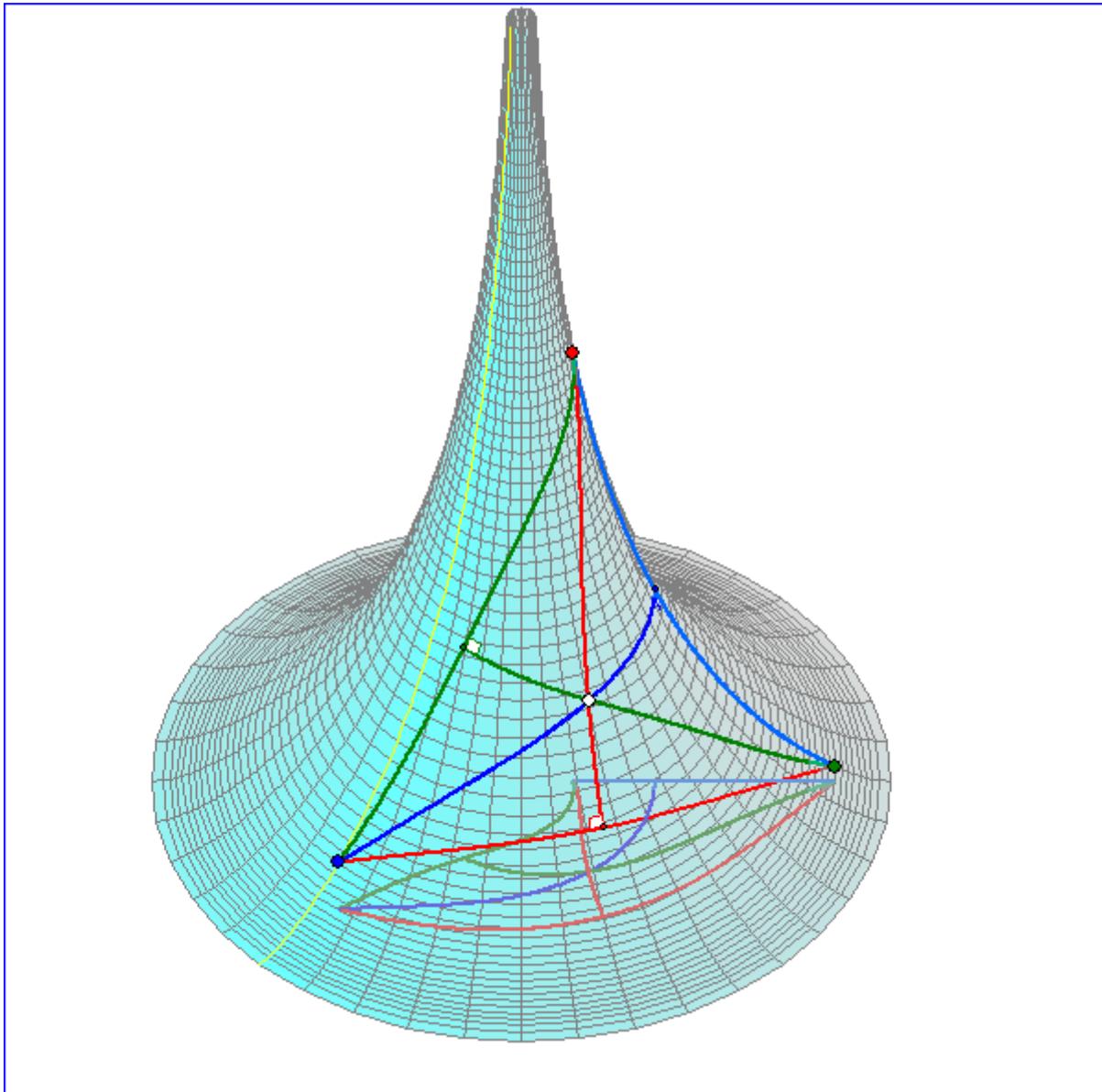


Abb. 9

Abbildung 10 zeigt das Beispiel eines Dreiecks, zu dem zwar die Höhen-Geodäten existieren, aber keinen gemeinsamen Schnittpunkt auf der Riemann-Fläche der Pseudosphäre haben. (Die rote Höhen-Geodäte geht nahe an dem grünen Eckpunkt vorbei.)

Die Eigenschaft 6 von Satz 7 ist eigentlich erwünscht, denn sie ist charakteristisch für die nicht-euklidische Geometrie. Die Probleme der Geometrie der Riemann-Fläche zur Pseudosphäre liegen darin, dass es nicht genügend Schnittpunkte gibt, um ähnlich gut geometrisch schließen zu können wie in der euklidischen Geometrie. Klein und Poincare haben dieses Problem gelöst, indem sie die Riemann-Fläche der Pseudosphäre in einen Teil einer Ebene abgebildet haben, so dass die auf der Pseudosphäre fehlenden Punkte in dem restlichen Teil der Ebene vorkommen. Dies wird in Abschnitt 10 für das Poincare-Modell dargestellt und in Abschnitt 20 für das Beltrami-Klein-Modell. Das Poincare-Modell benutzt Halbkreise, die senkrecht auf der Rechtsachse stehen. Darum sollen im nächsten Abschnitt zunächst Elemente der Kreisgeometrie dargestellt werden.

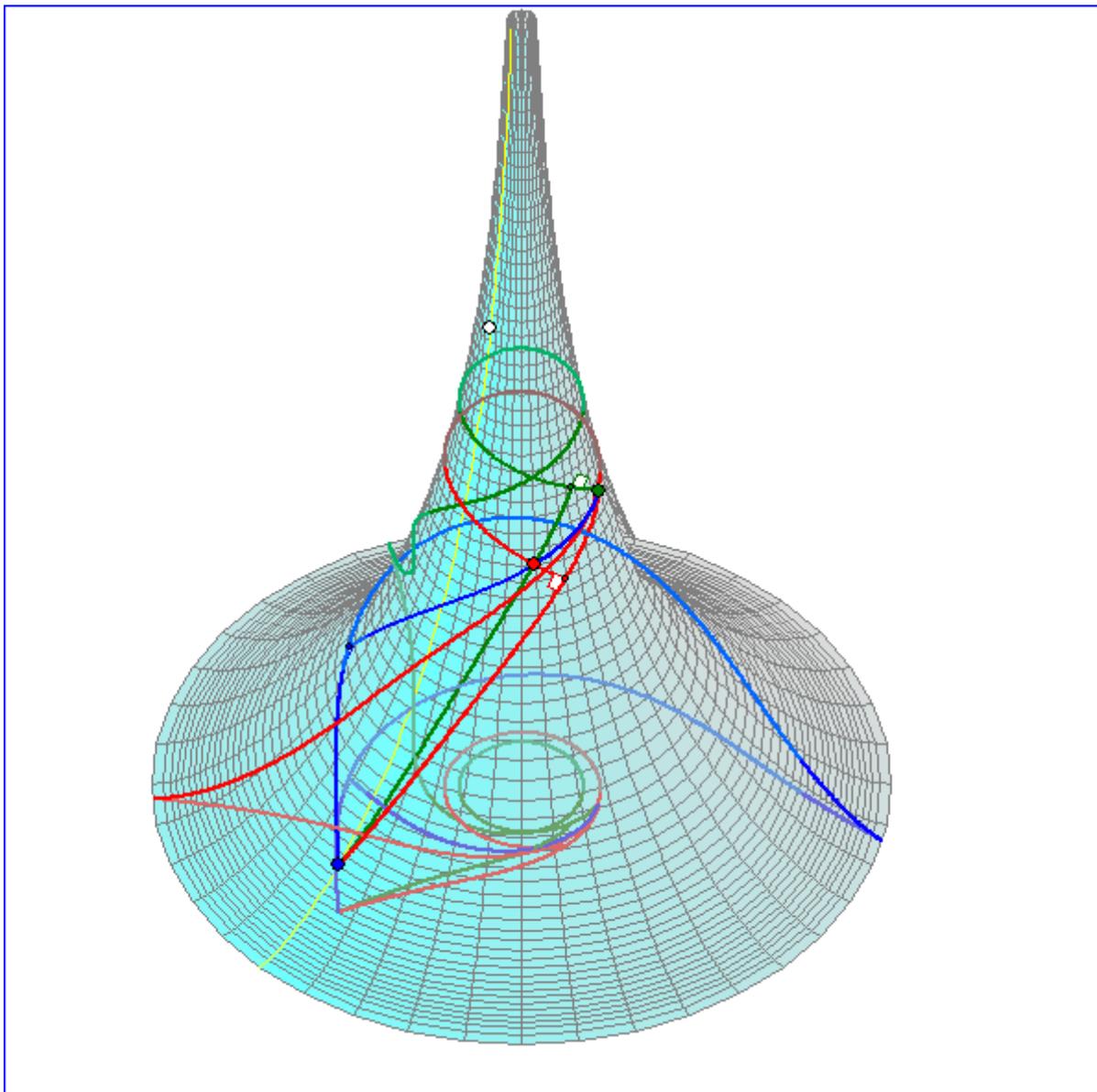


Abb. 10

7. Die Kreis-Potenz

Im \mathbf{R}^2 ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M(x_M; y_M)$ und dem Radius r durch die Punktmenge $\{(x; y) \mid (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 - r^2 = 0\}$ gegeben.

Wir benutzen die Abkürzung $K(M; r; x; y) := (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 - r^2$ und bezeichnen die Kombination aus dieser Punktmenge und dem Term $K(M; r; x; y)$ in den Variablen x und y als ‚Kreis zu $K(M; r; x; y)$ ‘. Für $r = 0$ besteht die Punktmenge nur aus dem Punkt M , was der Vorstellung von einem Kreis widerspricht. Wir ordnen dieser Menge $\{M\}$ dennoch den Term $K(M; 0; x; y)$ zu und nennen diese Kombination aus Punktmenge und Term den ‚Nullkreis zu M ‘. Dies ist üblich, weil auch für die Nullkreise der im Folgenden definierte Begriff ‚Potenz‘ sinnvoll ist. Er wurde 1826 von Jakob Steiner (1796-1863) in die Geometrie eingeführt.

Definition : Die Potenz des Punktes $P(x_P; y_P)$ zum Kreis $K(M; r; x; y)$ ist die Zahl $K(M; r; x_P; y_P)$, die sich durch Einsetzen der Zahlen x_P und y_P an die Stelle der Variablen x und y ergibt. Dies ist die Differenz $|\overline{MP}|^2 - r^2$ aus dem Quadrat des Abstands von P und M und dem Quadrat vom Radius.

$K_1 = K(M_1; r_1; x; y)$ und $K_2 = K(M_2; r_2; x; y)$ seien zwei Kreise mit verschiedenen Mittelpunkten. Statt $(x_{M_i}; y_{M_i})$ schreiben wir $(x_i; y_i)$. Dann ist $K_1 - K_2 =$

$(x^2 - 2 \cdot x \cdot x_1 + x_1^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot y_1 + y_1^2 - r_1^2) - (x^2 - 2 \cdot x \cdot x_2 + x_2^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot y_2 + y_2^2 - r_2^2)$
 $= 2 \cdot x \cdot (x_2 - x_1) + 2 \cdot y \cdot (y_2 - y_1) + x_1^2 + y_1^2 - r_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - r_2^2$ ein linearer Term, der x^2 und y^2 nicht mehr enthält. Die Gleichung $K(M_1; r_1; x; y) - K(M_2; r_2; x; y) = 0$ beschreibt folglich eine Gerade.

Definition : Die Gerade $K(M_1; r_1; x; y) - K(M_2; r_2; x; y) = 0$ heißt Potenzgerade der Kreise zu $K(M_1; r_1; x; y)$ und $K(M_2; r_2; x; y)$.

Im folgenden Satz 9 benutzen wir den Begriff des Teilverhältnisses auch für negative Zahlen.

Definition : Für einen Punkt C auf einer Geraden AB mit $A \neq B$ schreiben wir

„ C teilt AB im Verhältnis $r : s$ “, wenn gilt : $(x_C; y_C) = \frac{r}{r+s} \cdot (x_A; y_A) + \frac{s}{r+s} \cdot (x_B; y_B)$.

Dann ist $(x_C; y_C) = (x_A; y_A) + \frac{s}{r+s} \cdot ((x_B; y_B) - (x_A; y_A))$, also $\frac{s}{r+s}$ der Parameter von C in einem lokalen Koordinatensystem auf der Geraden AB mit dem Nullpunkt bei A und dem

Einspunkt bei B . Es ist $\frac{r}{s} = \pm \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|}$, wobei das $+$ -Zeichen genau für die Punkte zwischen A

und B gilt. Im Fall $\frac{r}{s} < -1$ liegt A zwischen C und B , und im Fall $-1 < \frac{r}{s} < 0$ liegt B zwischen A und C . Bei einem negativen Teilverhältnis sprechen wir von ‚äußerer Teilung‘, sonst von ‚innerer‘.

Satz 9 :

1. $\{S_1; S_2\}$ sei die Menge der gemeinsamen Punkte des Kreises zu $K(M; r; x; y)$ und der Geraden g durch den Punkt P . Dann ist die Potenz $K(M; r; x_P; y_P)$ das Produkt $|\overline{PS_1}| \cdot |\overline{PS_2}|$ der Abstände von P zu S_1 und S_2 , falls P außerhalb des Kreises oder darauf liegt; andernfalls ist die Potenz die negative Zahl $-|\overline{PS_1}| \cdot |\overline{PS_2}|$.

Im Fall $S_1 = S_2$ und $r > 0$ ist g Tangente und die Potenz das Quadrat des Abstands d des Punktes P vom Tangentenberührungspunkt. Dann schneidet der Kreis um P mit dem Radius d den Kreis zu $K(M; r; x; y)$ senkrecht.

Im Fall $r = 0$ ist die Potenz das Quadrat des Abstands des Punktes P von $S_1 = S_2$.

2. Die Potenzgerade j der Kreise zu $K_1 = K(M_1; r_1; x; y)$ und $K_2 = K(M_2; r_2; x; y)$ mit verschiedenen Mittelpunkten ist die Menge der Punkte P , für welche die Potenz zu

beiden Kreisen gleich ist. j steht senkrecht zur Verbindungsgeraden g von M_1 und M_2 . Der Schnittpunkt F von g und j teilt die Strecke M_1M_2 im Verhältnis

$\left(\left|M_1M_2\right|^2 + r_2^2 - r_1^2\right) : \left(\left|M_1M_2\right|^2 + r_1^2 - r_2^2\right)$. Im Fall $r_2 = 0$ ist das Spiegelbild M_2' von M_2

an j der Punkt auf g , für den $\left|M_1M_2\right| \cdot \left|M_1M_2'\right| = r_1^2$ gilt, wobei M_1 nicht zwischen M_2 und M_2' liegt.

Gemeinsame Punkte von K_1 und K_2 liegen auf j . Wenn es nur einen gemeinsamen Punkt gibt, ist er F .

Ein Kreis K_3 schneidet beide Kreise K_1 und K_2 senkrecht genau dann, wenn der Mittelpunkt M_3 von K_3 auf der Potenzgeraden j liegt und das Radius-Quadrat die Potenz von M_3 ist,.

Ein Punkt P auf j hat zum Kreis K_λ mit der Gleichung

$$(1-\lambda) \cdot K(M_1; r_1; x; y) + \lambda \cdot K(M_2; r_2; x; y) = 0 \text{ und } \lambda \in \mathbf{R} \text{ die gleiche}$$

Potenz wie zu K_1 und K_2 .

3. Wenn drei Kreise gegeben sind, deren Mittelpunkte ein nicht ausgeartetes Dreieck bilden, dann haben die drei Potenzgeraden der Kreis-Paare einen gemeinsamen Punkt P . (Abb. 11)

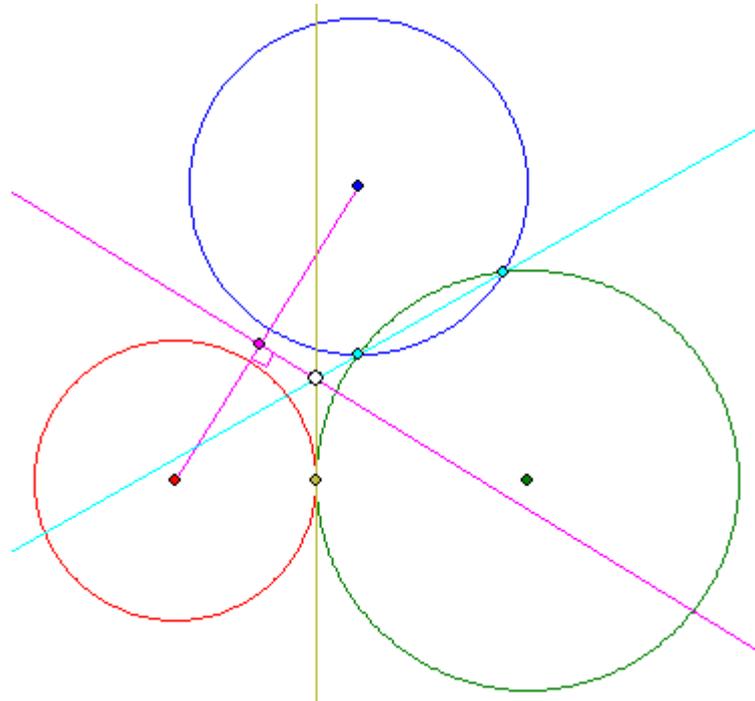


Abb. 11

Beweis : 1. Die Punktmenge von g sei $\{(x_p + t \cdot v_x; y_p + t \cdot v_y \mid t \in \mathbf{R})$ mit einem Richtungsvektor $(v_x; v_y)$ mit der Länge 1. Dann ist $K(M; r; x_p + t \cdot v_x; y_p + t \cdot v_y) = 0$ eine quadratische Gleichung für den Parameter t der gemeinsamen Punkte. Darin ist die Vorzahl von t^2 gleich $v_x^2 + v_y^2 = 1$ und das konstante Glied $K(M; r; x_p; y_p)$. Nach dem Satz von

Vieta ist das Produkt der Lösungen $t_1 \cdot t_2$ gleich diesem konstanten Glied. Da der Richtungsvektor die Länge 1 hat, geben t_1 und t_2 signierte Abstände des Punktes P von S_1 und S_2 an.

Falls $S_1 = S_2$ und $r > 0$ ist dies ein Tangentenberührungspunkt. Wegen $t_1 = t_2$ ist die Potenz von P das Quadrat des Abstands d des Berührungspunkts von P.

Im Fall $r = 0$ ist $S_1 = S_2$ und die Potenz von P das Quadrat des Abstands von diesem Punkt.

2. Genau für die Punkte P von j gilt $K(M_1; r_1; x_p; y_p) = K(M_2; r_2; x_p; y_p)$. Dies folgt unmittelbar aus der Gleichung der Potenzgeraden. An der ausmultiplizierten Fassung $2 \cdot x_p \cdot (x_2 - x_1) + 2 \cdot y_p \cdot (y_2 - y_1) + x_1^2 + y_1^2 - r_1^2 - x_2^2 - y_2^2 + r_2^2 = 0$ dieser Gleichung erkennt man, dass der Richtungsvektor $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ von g senkrecht zu j steht. Der Punkt, der die Strecke M_1M_2 im Verhältnis $\left(\left|\overline{M_1M_2}\right|^2 + r_2^2 - r_1^2\right) : \left(\left|\overline{M_1M_2}\right|^2 + r_1^2 - r_2^2\right)$ teilt, hat die Koordinaten

$$\lambda \cdot (x_1; y_1) + (1 - \lambda) \cdot (x_2; y_2) \text{ mit } \lambda = \frac{\left|\overline{M_1M_2}\right|^2 + r_2^2 - r_1^2}{2 \cdot \left|\overline{M_1M_2}\right|^2} = 0,5 + \frac{0,5 \cdot (r_2^2 - r_1^2)}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \text{ Die}$$

Einsetzung in die Gleichung der Potenzgeraden zeigt, dass dieser Punkt F ist. Das Spiegelbild M'_2 von M_2 an j hat die Koordinaten

$$2 \cdot (\lambda \cdot (x_1; y_1) + (1 - \lambda) \cdot (x_2; y_2)) - (x_2; y_2) = 2 \cdot \lambda \cdot (x_1; y_1) + (1 - 2 \cdot \lambda) \cdot (x_2; y_2).$$

Für $r_2 = 0$ teilt M'_2 also M_1M_2 im Verhältnis $\left(\left|\overline{M_1M_2}\right|^2 - r_1^2\right) : r_1^2$. Dann ist

$$\left|\overline{M_1M_2}\right| : \left|\overline{M_1M'_2}\right| = \left|\overline{M_1M_2}\right|^2 : r_1^2, \text{ also } \left|\overline{M_1M_2}\right| \cdot \left|\overline{M_1M'_2}\right| = r_1^2.$$

Da $\frac{\left|\overline{M_1M_2}\right|^2 - r_1^2}{r_1^2} > -1$ ist, liegt M_1 nicht zwischen M_2 und M'_2 .

Dass gemeinsame Punkte beider Kreise auf j liegen folgt unmittelbar aus der Definitionsgleichung. Da g Symmetrieachse des Kreis-Paars ist, liegen diese Punkte symmetrisch zu g, folglich auf g, wenn die Punkte zusammenfallen.

Sei nun M_3 ein Punkt der Potenzgeraden. Ein Kreis, dessen Radius-Quadrat die Potenz von M_3 ist, schneidet dann beide Kreise senkrecht, weil nach 1. die Tangenten von M_3 an die Kreise Berührungspunkte mit dem gleichen Abstand von M_3 haben.

Wenn umgekehrt ein Kreis K_3 beide Kreise K_1 und K_2 senkrecht schneidet, dann ist sein Radius-Quadrat die Potenz zu beiden Kreisen, so dass der Mittelpunkt M_3 auf j liegen muss.

Es sei K_λ der Kreis mit der Gleichung $(1 - \lambda) \cdot K(M_1; r_1; x; y) + \lambda \cdot K(M_2; r_2; x; y) = 0$

für $\lambda \in \mathbf{R}$. Ein Punkt P auf j hat zu K_λ wegen $K(M_1; r_1; x_p; y_p) = K(M_2; r_2; x_p; y_p)$ die Potenz $(1 - \lambda) \cdot K(M_1; r_1; x_p; y_p) + \lambda \cdot K(M_2; r_2; x_p; y_p) = K(M_1; r_1; x_p; y_p)$.

3. K_1, K_2 und K_3 seien die drei Kreise. Die Potenzgerade j_{12} zu dem Paar $(K_1; K_2)$ schneidet die Potenzgeraden j_{23} zu dem Paar $(K_2; K_3)$ in einem Punkt P, da diese Geraden orthogonal zu Seiten des nicht ausgearteten Mittelpunkts-Dreiecks sind. Da die Potenz von P zu allen drei Kreisen gleich ist, liegt P auch auf der dritten Potenzgeraden. \square

Die Bedingung $\left|\overline{M_1M_2}\right| \cdot \left|\overline{M_1M'_2}\right| = r_1^2$ bei der 2. Behauptung charakterisiert Punkte M_2 und M'_2 , die durch Spiegelung am Kreis um M_1 mit dem Radius r_1 auseinander hervorgehen. Dies wird in Abschnitt 9 erläutert.

8. Kreisbüschel

Definition : K_1 zu $K(M_1; r_1; x; y)$ und K_2 zu $K(M_2; r_2; x; y)$ seien zwei Kreise mit verschiedenen Mittelpunkten. Unter dem von K_1 und K_2 erzeugten Kreisbüschel B verstehen wir die Menge der Kreise, die durch eine Gleichung

$$(1-\lambda) \cdot K(M_1; r_1; x; y) + \lambda \cdot K(M_2; r_2; x; y) = 0 \text{ mit } \lambda \in \mathbf{R} \text{ beschrieben werden.}$$

Je nachdem, ob die Zahl der gemeinsamen Punkte von K_1 und K_2 2, 1 oder 0 ist, nennt man das Büschel elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch. Die Potenzgerade g von K_1 und K_2 heißt Potenzgerade des Büschels. Fügt man die Potenzgerade zum Kreisbüschel hinzu, bezeichnen wir die Kurvenmenge als ‚erweitertes Kreisbüschel‘. Wir nennen zwei erweiterte Büschel ‚orthogonal‘, wenn jedes Element (Kreis, Nullkreis oder Gerade) des einen Büschels orthogonal zu jedem Element des andern Büschels ist. Dabei wird ein Nullkreis als orthogonal zu einer Kurve angesehen, wenn der zugehörige Punkt auf der Kurve liegt.

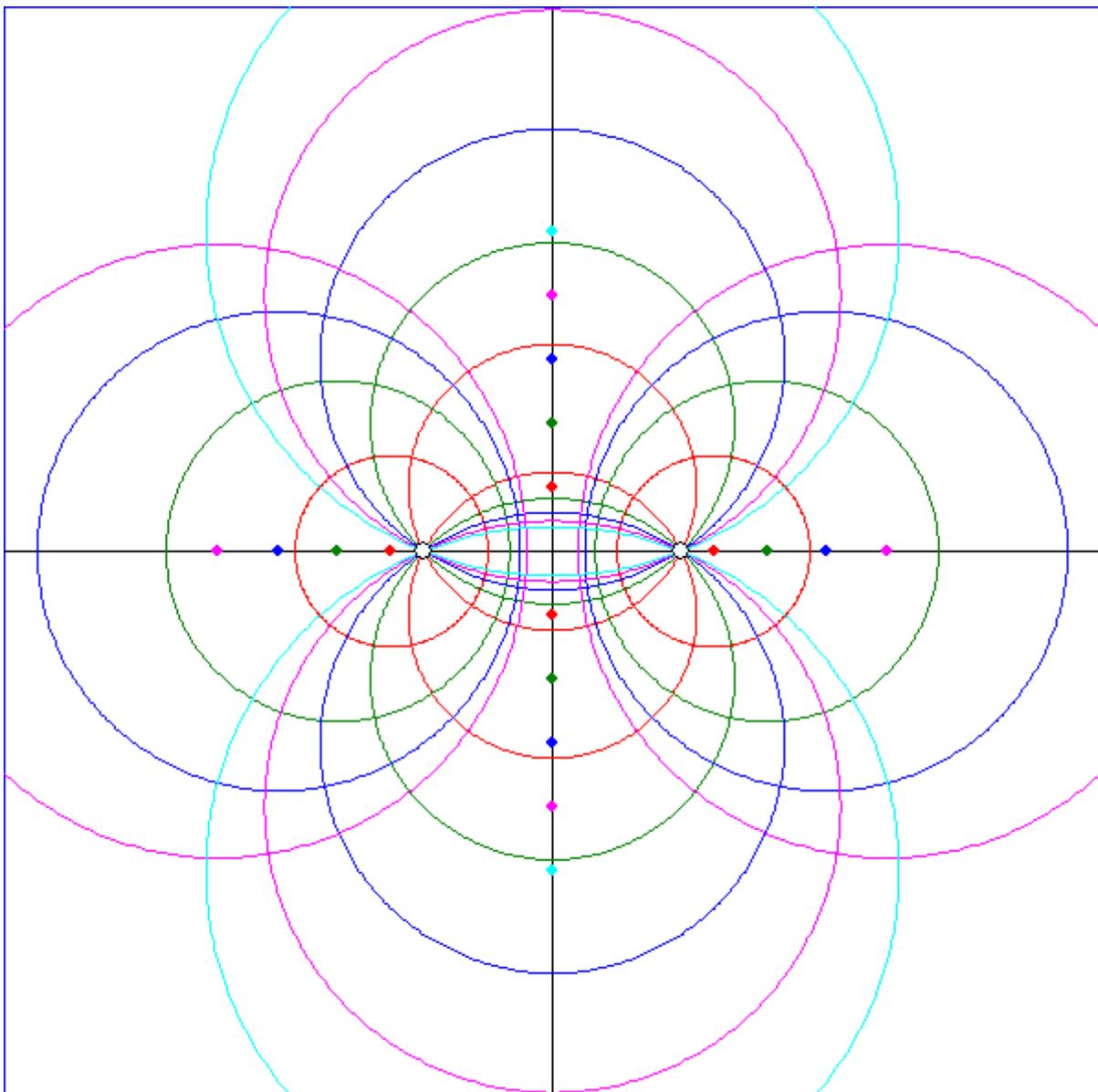


Abb. 12

g ist dann Potenzgerade zu zwei beliebigen Kreisen des Büschels, weil
 $(1-\lambda) \cdot K_1 + \lambda \cdot K_2 - ((1-\mu) \cdot K_1 + \mu \cdot K_2) = (\mu - \lambda) \cdot (K_1 - K_2)$. Falls $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ eine Gleichung von g ist, gibt es genau eine Zahl μ mit $a \cdot x + b \cdot y + c = K_1 - K_2$. Dann gibt es zu jedem Kreis K von \mathbf{B} genau eine Zahl δ , so dass der normalisierte Term von K gleich $K(M_1; r_1; x; y) + \delta \cdot (a \cdot x + b \cdot y + c)$ ist. Denn aus $K = (1-\lambda) \cdot K_1 + \lambda \cdot K_2$ folgt $K = K_1 + \lambda \cdot (K_2 - K_1) = K_1 + \lambda \cdot \mu(a \cdot x + b \cdot y + c)$. Darum wird das von K_1 und K_2 erzeugte Büschel eindeutig durch einen Kreis darin und die Potenzgerade bestimmt.

Das von K_1 und K_2 erzeugte erweiterte Büschel wird durch $\{\mu \cdot K_1 + \lambda \cdot K_2 \mid \mu, \lambda \in \mathbf{R}, \mu \neq 0 \text{ oder } \lambda \neq 0\}$ beschrieben.

Verschiedene Parameter λ in $(1-\lambda) \cdot K(M_1; r_1; x; y) + \lambda \cdot K(M_2; r_2; x; y) = 0$ führen zu verschiedenen Kreisen.

Zwei verschiedene Kreise des Büschels haben stets die gleichen Schnittpunkte wie K_1 und K_2 . Nach der zweiten Behauptung von Satz 9 sind zwei erweiterte Kreisbüschel genau dann orthogonal, wenn ihre Potenzgeraden orthogonal sind.

Abbildung 12 zeigt ein Paar orthogonaler Kreisbüschel, von denen eines elliptisch ist und das andere hyperbolisch. Die Kreise des elliptischen Büschels gehen alle durch die weiß markierten Punkte, welche zu den Nullkreisen des hyperbolischen Büschels gehören. Die Zentren der Kreise des elliptischen Büschels liegen auf der schwarz gezeichneten Potenzgeraden des hyperbolischen Büschels. Auf der Potenzgeraden des elliptischen Büschels liegen die Zentren des hyperbolischen Büschels. Alle Kreise des einen Büschels sind orthogonal zu denen des anderen.

Satz 10: K_1 zu $K(M_1; r_1; x; y)$ und K_2 zu $K(M_2; r_2; x; y)$ seien zwei Kreise mit verschiedenen Mittelpunkten. \mathbf{B} sei das von K_1 und K_2 erzeugte erweiterte Büschel. $a \cdot x + b \cdot y + c$ sei ein Term der Potenzgeraden j von \mathbf{B} .

1. Wenn $P(x_P; y_P)$ ein Punkt ist, der nicht auf der Potenzgeraden von \mathbf{B} liegt, dann gibt es genau eine Zahl λ , für die der Büschelkreis $(1-\lambda) \cdot K_1 + \lambda \cdot K_2$ durch P geht.
2. $(1-\lambda) \cdot K_1 + \lambda \cdot K_2$ ist der Kreis mit dem Mittelpunkt $(1-\lambda) \cdot (x_1; y_1) + \lambda \cdot (x_2; y_2)$ und dem Radius-Quadrat $R(\lambda)^2 := \overline{M_1 M_2}^2 \cdot \lambda^2 - \lambda \cdot (\overline{M_1 M_2}^2 - r_2^2 + r_1^2) + r_1^2$.
3. z sei die Anzahl der gemeinsamen Punkte von K_1 und K_2 . Dann ist die Anzahl n der Nullkreise in \mathbf{B} gleich $2 - z$.
4. Es gibt genau ein zu \mathbf{B} orthogonales erweitertes Büschel \mathbf{B}^\perp . Die gemeinsamen Punkte von \mathbf{B}^\perp sind die Punkte der Nullkreise von \mathbf{B} und umgekehrt.

Beweis: 1. Die Gleichung $(1-\lambda) \cdot K(M_1; r_1; x_P; y_P) + \lambda \cdot K(M_2; r_2; x_P; y_P) = 0$ ist eindeutig nach λ auflösbar, es sei denn $K(M_1; r_1; x_P; y_P) - K(M_2; r_2; x_P; y_P) = 0$; dann liegt P aber auf der Potenzgeraden.

$$2. (1-\lambda) \cdot K(M_1; r_1; x; y) + \lambda \cdot K(M_2; r_2; x; y) = (x - ((1-\lambda) \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2))^2 + (y - ((1-\lambda) \cdot y_1 + \lambda \cdot y_2))^2 - (-\lambda \cdot (1-\lambda) \cdot ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2) + (1-\lambda) \cdot r_1^2 + \lambda \cdot r_2^2)$$

und

$$-\lambda \cdot (1-\lambda) \cdot ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2) + (1-\lambda) \cdot r_1^2 + \lambda \cdot r_2^2 =$$

$$\left| \overline{M_1 M_2} \right|^2 \cdot \lambda^2 - \lambda \cdot \left(\left| \overline{M_1 M_2} \right|^2 - r_2^2 + r_1^2 \right) + r_1^2$$

3. $(1-\lambda) \cdot K(M_1; r_1; x; y) + \lambda \cdot K(M_2; r_2; x; y)$ gibt genau dann einen Nullkreis an, wenn $R(\lambda)$ gleich Null ist. Die Diskriminante der quadratischen Gleichung $R(\lambda) = 0$ ist

$$\left(\left| \overline{M_1 M_2} \right|^2 - r_2^2 + r_1^2 \right)^2 - 4 \cdot \left| \overline{M_1 M_2} \right|^2 \cdot r_1^2 = \left(\left| \overline{M_1 M_2} \right|^2 - (r_1 - r_2)^2 \right) \cdot \left(\left| \overline{M_1 M_2} \right|^2 - (r_1 + r_2)^2 \right).$$

n ist 0, 1 oder 2 je nachdem diese Diskriminante kleiner, gleich oder größer als Null ist. Sie ist kleiner als Null genau dann, wenn $\left| \overline{M_1 M_2} \right|$ im Innern des Intervalls $\left[|r_1 - r_2|; r_1 + r_2 \right]$ liegt, also wenn

die Kreise zwei Schnittpunkte haben. Sie ist genau dann gleich Null, wenn $\left| \overline{M_1 M_2} \right|$ auf dem

Rand des Intervalls $\left[|r_1 - r_2|; r_1 + r_2 \right]$ liegt, also wenn $z = 1$ ist. Und sie ist größer als Null

genau dann, wenn $\left| \overline{M_1 M_2} \right|$ außerhalb des Intervalls $\left[|r_1 - r_2|; r_1 + r_2 \right]$ liegt, also kein

Schnittpunkt vorhanden ist.

4. Wenn K_3, K_4 und K_5 drei Kreise sind, die alle drei orthogonal zu K_1 und K_2 sind, dann liegen ihre Mittelpunkte auf der Potenzgeraden j von B . Der Kreis in dem von K_3 und K_4 erzeugten Büschel, der den gleichen Mittelpunkt wie K_5 hat, hat auch die gleiche Potenz zu K_1 und K_2 , also auch den gleichen Radius und stimmt darum mit K_5 überein. Darum gibt es nur ein zu B orthogonales erweitertes Büschel B^\perp .

Ein gemeinsamer Punkt P aller Kreise von B^\perp liegt auf einem Kreis von B , der in P von allen Kreisen in B^\perp senkrecht geschnitten wird. Darum muss dieser Kreis ein Nullkreis sein. Die Umkehrung gilt ebenfalls, weil die Orthogonalität eine symmetrische Relation ist. \square

Die Gleichung $(1-\lambda) \cdot K(M_1; r_1; x; y) + \lambda \cdot K(M_2; r_2; x; y) = 0$ hat genau dann keine Lösungspaar $(x; y)$, wenn $R(\lambda)$ kleiner als Null ist. Genau für diese Zahlen λ ergibt sich also kein zugehöriger Kreis. Dies ist nur bei hyperbolischen Büscheln für die Parameter λ möglich, die zwischen den Parametern der beiden Nullkreise liegen.

Aus Satz 10 folgt, dass der gemeinsame Punkt P in einem parabolischen Büschel B auch zu seinem Nullkreis gehört. B^\perp hat ebenfalls P als gemeinsamen Punkt, und gehört auch zu seinem Nullkreis. Die Potenzgerade von B bzw. B^\perp ist Tangente an alle Kreise von B bzw. B^\perp .

9. Spiegelungen am Kreis

Definition : Unter der Spiegelung σ_K an einem Kreis K mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r > 0$ verstehen wir die Abbildung der Menge der Punkte $P \neq M$ des \mathbf{R}^2 , die dem Punkt P folgenden Punkt P' zuordnet:

P' ist der Punkt auf der Geraden MP , für den $\left| \overline{MP'} \right| \cdot \left| \overline{MP} \right| = r^2$ gilt, so dass M nicht zwischen P und P' liegt.

Der in der 2. Behauptung von Satz 9 genannte Punkt M_2' ist also nicht nur das Spiegelbild bei Spiegelung an der Geraden j , sondern auch bei Spiegelung am Kreis K_1 .

Hilfssatz 2 : K_0 sei ein Kreis um $M(0 ; 0)$ mit dem Radius r und σ_0 die Spiegelung daran.
Dann gilt:

1. $P' = \left(\frac{r^2 \cdot x}{x^2 + y^2}; \frac{r^2 \cdot y}{x^2 + y^2} \right)$ ist das Bild $P\sigma_0$ von $P(x ; y)$.
2. K_1 sei ein Kreis mit dem Mittelpunkt $(a ; b)$ und dem Radius s . Sei $\mu := \frac{a^2 + b^2 - s^2}{r^2}$.
Wenn $\mu \neq 0$ ist, dann ist die Menge der σ_0 -Bildpunkte zu den Punkten von K_1 die Punktmenge des Kreises zu $\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \cdot K_0 + \frac{1}{\mu} \cdot K_1$ mit dem Mittelpunkt $\left(\frac{a}{\mu}; \frac{b}{\mu}\right)$ und dem Radius $\left|\frac{s}{\mu}\right|$. Andernfalls ist die Bildmenge von Punkten $P \neq M$ in K_1 die Menge der Punkte auf der Potenzgeraden von K_0 und K_1 . Diese hat dann die Gleichung $a \cdot x + b \cdot y - 0,5 \cdot r^2 = 0$ und ist parallel zur Tangente an K_1 in M .
3. g sei die Gerade mit der Gleichung $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$. Sei $v := \frac{2 \cdot c}{r^2}$.
Wenn $c \neq 0$ ist, dann ist die Menge der σ_0 -Bildpunkte zu den Punkten von g die Punktmenge des Kreises zu $K_0 + \frac{2}{v} \cdot (a \cdot x + b \cdot y + c)$ mit dem Mittelpunkt $\left(-\frac{a}{v}; -\frac{b}{v}\right)$ und dem Radius $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{|v|}$. Dieser Kreis geht durch $(0 ; 0)$ und hat dort eine Tangente parallel zu g .
Im Fall $c = 0$ ist die Bildmenge die Menge der Punkte $\neq M$ auf g .
4. Die Vereinigungsmenge eines Kreisbüschels mit ihrer Potenzgeraden wird durch σ_0 auf die Vereinigungsmenge eines Kreisbüschels mit ihrer Potenzgeraden abgebildet.

Beweis : 1. Es ist $|\overline{MP'}| = \frac{r^2}{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{r^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r^2}{|\overline{MP}|}$.

2. Aus $P' = P\sigma_0$ folgt $P'\sigma_0 = P$. Sei P' der Punkt $(x ; y)$. Dann ist $P'\sigma_0 = \left(\frac{r^2 \cdot x}{x^2 + y^2}; \frac{r^2 \cdot y}{x^2 + y^2} \right)$.

P' ist genau dann Bild eines Punktes von K_1 , wenn $P'\sigma_0$ auf K_1 liegt, wenn also gilt:

$$\left(\frac{r^2 \cdot x}{x^2 + y^2} - a \right)^2 + \left(\frac{r^2 \cdot y}{x^2 + y^2} - b \right)^2 - s^2 = 0, \text{ also wenn}$$

$$(a^2 + b^2 - s^2) \cdot (x^2 + y^2) - (2 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b \cdot y - r^2) \cdot r^2 = 0 \text{ gilt.}$$

Im Fall $\mu \neq 0$ errechnet man daraus die äquivalente Gleichung

$$\left(x - \frac{a}{\mu} \right)^2 + \left(y - \frac{b}{\mu} \right)^2 - \left(\frac{s}{\mu} \right)^2 = \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \cdot (x^2 + y^2 - r^2) + \frac{1}{\mu} \cdot ((x - a)^2 + (y - b)^2 - s^2) = 0,$$

andernfalls $a \cdot x + b \cdot y - 0,5 \cdot r^2 = 0$.

Die Potenzgerade von K_0 und K_1 hat für $\mu = 0$ die Gleichung

$$2 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b \cdot y - r^2 = ((x - a)^2 + (y - b)^2 - s^2) - (x^2 + y^2 - r^2) = 0. \text{ Da die Gleichung der}$$

Tangente an K_1 in M $(x - a) \cdot (-a) + (y - b) \cdot (-b) - s^2 = 0$ ist, ist die Potenzgerade parallel zu dieser Tangente.

3. Analog ergibt die Einsetzung in die Gleichung $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$:

$a \cdot \frac{r^2 \cdot x}{x^2 + y^2} + b \cdot \frac{r^2 \cdot y}{x^2 + y^2} + c = 0$. Falls $c = 0$ ist ergibt dies die Gleichung von g . Andernfalls ist die Gleichung äquivalent mit

$$\left(x + \frac{a}{v}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{v}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{v}\right)^2 = (x^2 + y^2 - r^2) + \frac{2}{v} \cdot (a \cdot x + b \cdot y + c) = 0. \text{ Der Kreis geht}$$

durch $(0; 0)$ und hat dort die Tangente $\left(x + \frac{a}{v}\right) \cdot \frac{a}{v} + \left(y + \frac{b}{v}\right) \cdot \frac{b}{v} - \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{v}\right)^2 = 0$, die parallel zu g ist.

4. Die abzubildende Vereinigungsmenge sei durch die beiden Kreise K_1 und \hat{K}_1 mit den Termen $(x - a)^2 + (y - b)^2 - s^2$ und $(x - \hat{a})^2 + (y - \hat{b})^2 - \hat{s}^2$ bestimmt. Dann beschreiben die Gleichungen $\mu \cdot K_1 + \lambda \cdot \hat{K}_1 = 0$ alle Kurven der Vereinigungsmenge, sofern λ und μ nicht beide gleich Null sind. Die Einsetzung von $\left(\frac{r^2 \cdot x}{x^2 + y^2}; \frac{r^2 \cdot y}{x^2 + y^2}\right)$ in $\mu \cdot K_1 + \lambda \cdot \hat{K}_1$ und anschließende Multiplikation mit $x^2 + y^2$ ergibt

$$\begin{aligned} \mu \cdot ((a^2 + b^2 - s^2) \cdot (x^2 + y^2) - (2 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b \cdot y - r^2) \cdot r^2 \\ + \lambda \cdot ((\hat{a}^2 + \hat{b}^2 - \hat{s}^2) \cdot (x^2 + y^2) - (2 \cdot \hat{a} \cdot x + 2 \cdot \hat{b} \cdot y - r^2) \cdot r^2). \end{aligned}$$

Dies ist eine Linearkombination der Terme für die Bilder von K_1 und \hat{K}_1 . □

Wenn im folgenden Satz 11 zur Beschreibung der Eigenschaften der Kreisspiegelungen die Größe $\sphericalangle (K_1; K_2; S)$ eines Winkels zu einem Kreispaar $(K_1; K_2)$ in einem Schnittpunkt S benutzt wird, dann wird darunter die Größe des Winkels zwischen Tangenten in S verstanden. Dies gilt entsprechend, wenn K_1 oder K_2 durch eine Gerade ersetzt wird. Da wir auf den Kreisen oder Geraden keine Orientierung auszeichnen, identifizieren wir die Winkelgröße α mit $\alpha + 180^\circ$ und $\alpha - 180^\circ$, wir rechnen also mit Winkelgrößen ‚modulo π ‘ statt ‚modulo 2π ‘. Dadurch wird auch bei nicht orientierten Tangenten die Winkelgrößenbestimmung eindeutig und es gibt einen eindeutigen Zusammenhang zwischen α und dem Kosinus von α . Kreise, die sich berühren, haben dann im Berührungspunkt die Größe des Schnittwinkels Null, unabhängig davon, ob sie sich innen oder außen berühren.

Stets gilt $\sphericalangle (K_1; K_2; S) = -\sphericalangle (K_2; K_1; S) = 180^\circ - \sphericalangle (K_2; K_1; S)$.

Wenn K_1 und K_2 gemeinsame Punkte S_1 und S_2 haben, dann ist $\sphericalangle (K_1; K_2; S_1) = \sphericalangle (K_2; K_1; S_2)$.

Für zwei Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 ist die Größe $\sphericalangle (K_1; K_2; S)$ des Schnittwinkels in einem gemeinsamen Punkt S gleich $\sphericalangle M_1 S M_2$ modulo π . Die Winkelgröße ergibt sich also dadurch, dass man den Vektor $\overrightarrow{SM_1}$ gegen den Uhrzeigersinn in die Richtung von $\overrightarrow{SM_2}$ dreht und beim Drehwinkel 180° abzieht, falls er nicht kleiner als 180° ist.

Satz 11 : K_1 sei ein Kreis zu $K(M_1; r_1; x; y)$ mit $r_1 > 0$ und σ_1 die Spiegelung an K_1 . K_2 und K_3 seien zwei weitere Kreise, g eine Gerade und P ein Punkt mit dem Bild $P' = P\sigma_1 \neq P$. Dann gilt:

1. σ_1 ist involutorisch, d. h. die Hintereinanderschaltung $\sigma_1\sigma_1$ ist die identische Abbildung.
2. Wenn K_2 nicht durch M_1 geht, dann bildet σ_1 den Kreis K_2 auf einen Kreis im von K_1 und K_2 erzeugten Büschel ab, der nicht durch M_1 geht. Wenn K_2 ein Nullkreis ist, dann auch das Bild davon.
Wenn M_1 auf K_2 liegt, dann bildet σ_1 den Kreis K_2 in die Potenzgerade von K_1 und K_2 ab, die parallel zur Tangente in M_1 ist.
3. Wenn g nicht durch M_1 geht, dann bildet σ_1 die Gerade g in den Kreis durch M_1 im von K_1 und g erzeugten Büschel ab. Die Tangente in M_1 an diesen Kreis ist zu g parallel.
Wenn M_1 auf g liegt, dann bildet σ_1 die Gerade g in sich ab.
4. K_1 liegt in dem Büschel, das von den Nullkreisen zu P und P' erzeugt wird.
 σ_1 bildet jeden Kreis des Büschels in einen Kreis des Büschels oder die zugehörige Potenzgerade ab.
Die Spiegelung an jedem Kreis dieses Büschels, der kein Nullkreis ist, bildet P in P' ab. Dies gilt auch für die Spiegelung an der Potenzgeraden des Büschels.
5. Wenn P und P' beide auf K_2 (bzw. g) liegen, dann wird K_2 (bzw. g) durch σ_1 auf sich abgebildet und K_2 (bzw. g) ist orthogonal zu K_1 .
6. P sei ein Schnittpunkt der Kreise K_2 und K_3 . K_2' , K_3' seien die Bilder bei der Spiegelung σ_1 . Dann ist $\square(K_2; K_3; P) = \square(K_2'; K_3'; P')$.
Wenn man K_2 oder K_3 durch Geraden ersetzt, gilt die Winkelgrößen-Gleichung ebenfalls.
7. Ein erweitertes Kreisbüschels wird durch σ_1 auf ein erweitertes Kreisbüschel abgebildet.

Beweis : 1: ergibt sich unmittelbar aus der Definition.

2. folgt aus Hilfssatz 2 falls M_1 der Punkt $(0; 0)$ ist. Für den allgemeinen Fall benutzen wir die Verschiebung $\tau: (x; y) \rightarrow (x + x_1; y + y_1)$, die $(0; 0)$ in M_1 abbildet. Bei dieser

Verschiebung und bei der Umkehrabbildung τ^{-1} werden Kreise in Kreise und Geraden in Geraden abgebildet und auch die Inzidenz- und die Winkel-Relationen bleiben erhalten. σ_0 sei die Spiegelung an dem Kreis um $(0; 0)$ mit dem Radius r_1 . Dann ist σ_1 die

Hintereinanderschaltung $\tau^{-1}\sigma_0\tau$ der Abbildungen τ^{-1} , σ_0 und τ (nacheinander von links nach rechts). Damit folgt 2. aus Hilfssatz 2.

3. folgt analog.

4. Das Bild des Nullkreises K_P zu P liegt nach 2. in dem von K_1 und K_P erzeugten Büschel und ist der Nullkreis zu P' .

Wenn K_3 mit positivem Radius und $K_3 \neq K_1$ in diesem Büschel liegt, dann wird das Büschel durch K_3 und K_1 erzeugt. Dann liegt das Bild $K_3\sigma_1$ nach 2. im gleichen Büschel oder ist seine Potenzgerade.

Die Spiegelung an K_3 bildet nach 2. K_P in $K_{P'}$ ab, also auch P in P' .

Dass auch die Spiegelung an der Potenzgerade P in P' abbildet folgt daraus, dass ihr Abstand von P und P' gleich ist.

5. Wenn P und P' beide auf K_2 liegen, dann liegt P auch auf $K_2\sigma_1$. Beide Kreise K_2 und $K_2\sigma_1$ liegen also in dem von K_P und $K_{P'}$ erzeugten Büschel und haben einen Punkt außerhalb der Potenzgeraden gemeinsam. Sie müssen darum gleich sein.

Die Potenzgerade des Büschels ist die Mittelsenkrechte von PP' . Darum liegt M_2 auf der Potenzgeraden. Die Potenz von M_2 zu K_1 ist also gleich der Potenz $|\overline{M_2P}|^2$ zu K_P . Darum ist K_3 nach Satz 9 orthogonal zu K_1 .

Wenn P und P' auf der Geraden g liegen, dann geht g durch M_1 . Dann ist $g\sigma_1 = g$ und g orthogonal zu K_1 .

6. P sei ein Schnittpunkt der Kreise K_2 und K_3 . K_2' und K_3' seien die Bilder bei der Spiegelung σ_1 .

Es sei zunächst vorausgesetzt, dass die beiden Tangenten in P nicht durch M_1 gehen. Dann gibt es eindeutig bestimmte Kreise \hat{K}_2 und \hat{K}_3 durch M_1 und P , die in P die gleiche Tangente haben wie K_2 bzw. K_3 , und es gilt $\square(K_2; K_3; P) = \square(\hat{K}_3; \hat{K}_2; M_1)$. $\hat{K}_2\sigma_1$ und $\hat{K}_3\sigma_1$ sind

nach der 2. Behauptung Geraden parallel zu den Tangenten an \hat{K}_2 bzw. \hat{K}_3 in M_1 . Darum ist

$$\square(\hat{K}_3; \hat{K}_2; M_1) = \square(\hat{K}_3\sigma_1; \hat{K}_2\sigma_1; P').$$

Schließlich ist $\square(\hat{K}_3\sigma_1; \hat{K}_2\sigma_1; P') = \square(K_3\sigma_1; K_2\sigma_1; P')$, weil sich \hat{K}_2 und K_2 sowie \hat{K}_3 und K_3 in P berühren und berührende Kreise auf Grund der Erhaltung der Inzidenz durch Kreisspiegelungen in berührende Kurven abgebildet werden.

Wenn die Tangente an K_3 in P nicht durch M_1 geht, wohl aber die Tangente h an K_2 in P , dann wird h auf sich abgebildet, und h ist auch Tangente von $K_2\sigma_1$. Dann ist

$$\square(K_2; K_3; P) = \square(\hat{K}_3; h; M_1) = \square(\hat{K}_3\sigma_1; h; P') = \square(K_3\sigma_1; K_2\sigma_1; P').$$

Wenn die Tangenten an K_2 und K_3 in P beide durch M_1 gehen, berühren sich K_2 und K_3 in P und folglich auch K_2' und K_3' in P' .

Wenn man K_2 oder K_3 durch Geraden ersetzt, schließt man analog.

7. ergibt sich aus der 4. Behauptung von Hilfssatz 2 bei Anwendung der Verschiebung wie beim Beweis der zweiten Behauptung. □

Satz 12 :

1. K_1 und K_2 seien zwei Kreise mit positiven Radien r_1 und r_2 . Im Fall $r_1 \neq r_2$ gibt es eine Kreis-Spiegelung σ_K , die K_1 in K_2 abbildet; im Fall $r_1 = r_2$ leistet dies eine Achsenspiegelung σ_h . Wenn K_1 und K_2 durch einen Punkt Q gehen oder senkrecht auf dem gleichen Kreis (mit positivem Radius) oder der gleichen Geraden stehen, dann gilt dies auch für K bzw. h .
2. K_1 sei ein Kreis und g eine Gerade. Dann gibt es eine Kreis-Spiegelung σ_K , die K_1 in g abbildet. Wenn K_1 und g durch einen Punkt Q gehen oder senkrecht auf dem gleichen Kreis (mit positivem Radius) oder der gleichen Geraden stehen, dann gilt dies auch für K .

Beweis : 1. K_1 und K_2 seien zunächst die Kreise mit Mittelpunkten $(x_1; 0)$ und $(x_2; 0)$ auf der Rechtsachse und verschiedenen positiven Radien r_1 und r_2 . K sei ein Kreis mit dem Mittelpunkt $(z; 0)$ und dem Radius s .

1. Fall : $r_1 + r_2 > |M_1 M_2|$, also $(r_1 + r_2)^2 > (x_1 - x_2)^2$. Dann sei $z = \frac{x_1 \cdot r_2 + x_2 \cdot r_1}{r_1 + r_2}$ und

$s = \frac{\sqrt{r_1 \cdot r_2 \cdot ((r_1 + r_2)^2 - (x_1 - x_2)^2)}}{r_1 + r_2}$. Es folgt $(x_1 + r_1 - z) \cdot (x_2 + r_2 - z) = s^2$ und

$(x_1 - r_1 - z) \cdot (x_2 - r_2 - z) = s^2$, also $(x_1 + r_1; 0) \sigma_K = (x_2 + r_2; 0)$ und

$(x_1 - r_1; 0) \sigma_K = (x_2 - r_2; 0)$, folglich auch $K_1 \sigma_K = K_2$.

2. Fall : $r_1 + r_2 \leq |M_1 M_2|$, folglich $(x_1 - x_2)^2 \geq (r_1 + r_2)^2 > (r_1 - r_2)^2$. Dann sei $z = \frac{x_1 \cdot r_2 - x_2 \cdot r_1}{r_1 - r_2}$

und $s = \frac{\sqrt{r_1 \cdot r_2 \cdot ((x_1 - x_2)^2 - (r_1 - r_2)^2)}}{|r_1 - r_2|}$. Es folgt $(x_1 + r_1 - z) \cdot (x_2 - r_2 - z) = s^2$ und

$(x_1 - r_1 - z) \cdot (x_2 + r_2 - z) = s^2$, also $(x_1 + r_1; 0) \sigma_K = (x_2 - r_2; 0)$ und

$(x_1 - r_1; 0) \sigma_K = (x_2 + r_2; 0)$, folglich ebenfalls $K_1 \sigma_K = K_2$.

Wenn K_1 und K_2 nicht auf der Rechtsachse liegen, kann man die Mittelpunkte durch eine euklidische Kongruenzabbildung auf die Rechtsachse bringen und so auf den Spezialfall zurückführen.

Im Fall $r_1 = r_2$ spiegelt man K_1 an der Mittelsenkrechten der beiden Mittelpunkte.

Wenn K_1 und K_2 durch einen Punkt Q gehen oder senkrecht auf dem gleichen Kreis (mit positivem Radius) oder der gleichen Geraden stehen, dann gilt dies auch für K . Denn K liegt in dem von K_1 und K_2 erzeugten Büschel.

2. Der Mittelpunkt von K_1 sei $M_1(x_1; 0)$ und der Radius r_1 . g sei die Parallele zur Hochachse durch $(a; 0)$.

1. Fall : K_1 und g haben einen gemeinsamen Punkt S . Für den Kreis K durch S und dem Mittelpunkt in einem von S verschiedenen Schnittpunkt von K_1 mit der Rechtsachse gilt dann $K_1 \sigma_K = g$.

2. Fall : K_1 und g haben keinen gemeinsamen Punkt. Wenn $a > x_1$ ist, dann bildet die Spiegelung an dem Kreis um $(x_1 - r_1; 0)$ mit dem Radius $\sqrt{2 \cdot r_1 \cdot (a - (x_1 - r_1))}$ den Kreis K_1 in g ab, da das Bild von $(x_1 - r_1; 0)$ der unendlich ferne Punkt von g ist und das Bild von $(x_1 + r_1; 0)$ der Punkt $(a; 0)$. Für $a < x_1$ nimmt man den Mittelpunkt $(x_1 + r_1; 0)$ und den Radius $\sqrt{2 \cdot r_1 \cdot ((x_1 + r_1) - a)}$.

Hier liegt K in dem von K_1 und g erzeugten erweiterten Büschel mit g als Potenzgerade.

Darum gilt auch hier die Zusatzeigenschaft von K . □

10. Das Poincare-Modell

Mit den Bezeichnungen ‚Gerade‘ und ‚Punkt‘ schließen wir an die Ausführungen im ersten Abschnitt an.

Definition :

- Die Menge der ‚Punkte‘ des Poincare-Modells ist die Menge $\{(w; s) \mid w, s \in \mathbf{R} \text{ und } s > 0\}$, also die Punktmenge der oberen Halbebene in einem zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem, die von der Rechtsachse begrenzt wird. Zur Kennzeichnung, dass $(w; s)$ ein ‚Punkt‘ des Poincare-Modells ist

benutzen wir das Hochzeichen ^P, schreiben also $(w; s)^P$. Diese ‚*Punkte*‘ nennen wir P-Punkte.

- Zur Definition der ‚*Geraden*‘ bezeichnen wir die Halbgerade $\{(w_0; s) | s > 0\}$ parallel zur Hochachse mit $[w_0]^P$. Wir nennen sie ‚Meridiangerade‘. Wir geben jeder Meridiangerade eine positive Orientierung durch Festlegung eines Durchlaufsinns von oben nach unten, also von größeren nach kleineren s-Werten. Den Halbkreis $\{(w; s) | (w - w_0)^2 + s^2 = s_0^2 \text{ und } s > 0\}$ bezeichnen wir mit $[w_0; s_0]^P$ und nennen ihn ‚Kreisgerade‘. Wir legen auf den Kreisgeraden eine positive Orientierung durch Auszeichnung eines Durchlaufsinns in Richtung wachsender w-Werte fest. Den Kreis oder die Gerade, wovon die Kreisgerade bzw. die Meridiangerade ein Teil ist, bezeichnen wir als den ‚Träger‘ der ‚*Geraden*‘. Wir nennen den ‚*Punkt*‘ $(w_0; s_0)^P$ ‚Scheitelpunkt‘ von $[w_0; s_0]^P$ und die Punkte $(w_0 - s_0; 0)$ und $(w_0 + s_0; 0)$ auf der Rechtsachse ‚Enden‘ von $[w_0; s_0]^P$. Meridian- und Kreis-Geraden nennen wir P-Geraden.
- Die Menge der ‚*Geraden*‘ des Poincare-Modells ist die Menge aller P-Geraden, also $\left\{ [w_0]^P \mid w_0 \in \mathbf{R} \right\} \cup \left\{ [w_0; s_0]^P \mid w_0 \in \mathbf{R} \text{ und } s_0 > 0 \right\}$.
- Winkelgrößen werden folgendermaßen festgelegt: Der Richtung einer Meridiangeraden g wird in jedem Punkt Q auf g die Richtungswinkelgröße $\angle(g; Q) = 0^\circ$ zugeordnet. Die Richtungswinkelgröße α zeigt die Richtung an, die sich bei euklidischer Drehung einer Meridiangeraden mit dem Drehwinkel α gegen den Uhrzeigersinn ergibt. (Negative Werte von α gehören zu einer Drehung im Uhrzeigersinn mit dem Betrag von α als Drehwinkel oder gegen den Uhrzeigersinn um $360^\circ + \alpha$.) Die Richtungswinkelgröße $\angle(g; Q)$ einer Kreisgeraden g in einem ‚*Punkt*‘ Q auf g gibt dann die Richtung der Tangente in Q an. Dabei identifizieren wir α nicht mit $\alpha + 180^\circ$ und $\alpha - 180^\circ$, rechnen also ‚modulo 2π ‘. Die Größe des Winkels zwischen zwei ‚*Geraden*‘ g und h, die einem ‚*Punkt*‘ Q gemeinsam haben, ist dann $\angle(g; h; Q) := \angle(h; Q) - \angle(g; Q)$. Da ‚*Geraden*‘ höchstens einen Punkt gemeinsam haben, schreiben wir statt $\angle(g; h; Q)$ auch $\angle(g; h)$. Wenn sich zwei ‚*Geraden*‘ g, h auf der Rechts-Achse berühren, definieren wir $\angle(g; h) = 0^\circ$ und nennen g und h ‚hyperbolisch parallel‘. Auch zwei Meridiangeraden g, h nennen wir hyperbolisch parallel und ordnen die Winkelgröße Null zu.
- Unter dem signierten P-Abstand des ‚*Punktes*‘ $Q = (w; s)^P$ auf der Kreisgeraden $g = [w_0; s_0]^P$ von deren Scheitelpunkt $S(w_0; s_0)^P$ verstehen wir (analog zur Pseudosphäre) die Zahl $d(w_0; s_0; w) := 0,5 \cdot \ln \frac{s_0 + (w - w_0)}{s_0 - (w - w_0)} = 0,5 \cdot \ln \frac{w - (w_0 - s_0)}{(w_0 + s_0) - w}$. Wenn C das Zentrum $(w_0; 0)$ von g ist und α die Größe des Winkels QCS, dann ist $d(w_0; s_0; w) = 0,5 \cdot \ln \frac{1 + \sin(\alpha)}{1 - \sin(\alpha)}$. Signierte P-Abstände zu von S verschiedenen Punkten auf g ergeben sich aus $d(w_0; s_0; w)$ durch Differenzbildung. Auf einer Meridiangeraden $[w_0]^P$ ist der signierte Abstand vom P-Punkt $(w_0; s_1)^P$ zum P-Punkt $(w_0; s_2)^P$ gleich $\ln \frac{s_1}{s_2}$. Nicht signierte P-Abstände ergeben sich daraus, indem man die Beträge nimmt. Wir bezeichnen den so definierten (nicht-signierten) P-Abstand zwischen ‚*Punkten*‘ Q und R mit $\|\overline{QP}\|^P$.

Der Quotient $\frac{w - (w_0 - s_0)}{(w_0 + s_0) - w}$, der in der Abstandsbestimmung vorkommt, gibt das Verhältnis

an, in dem der Punkt $(w; 0)$ auf der Rechtsachse die Strecke zwischen den Enden von $[w_0; s_0]^P$ teilt. Der signierte P-Abstand von $(w_1; s_1)^P$ nach $(w_2; s_2)^P$ auf $[w_0; s_0]^P$ ergibt

$$\text{sich aus } d(w_0; s_0; w_2) - d(w_0; s_0; w_1) = 0,5 \cdot \ln \frac{w_2 - (w_0 - s_0)}{(w_0 + s_0) - w_2} - 0,5 \cdot \ln \frac{w_1 - (w_0 - s_0)}{(w_0 + s_0) - w_1} =$$

$$0,5 \cdot \ln \frac{\frac{w_2 - (w_0 - s_0)}{(w_0 + s_0) - w_2}}{\frac{w_1 - (w_0 - s_0)}{(w_0 + s_0) - w_1}}. \text{ Hierbei gibt der Doppelquotient das Verhältnis zweier}$$

Teilverhältnisse an, also ein ‚Doppelverhältnis‘. Die Zahl s_0 ist für $w_1 \neq w_2$ eindeutig bestimmt, da verschiedenen ‚Punkte‘ genau eine ‚Verbindungsgerade‘ haben.

Diese Maßbestimmung geht auf Arthur Cayley (1821-1895) zurück.

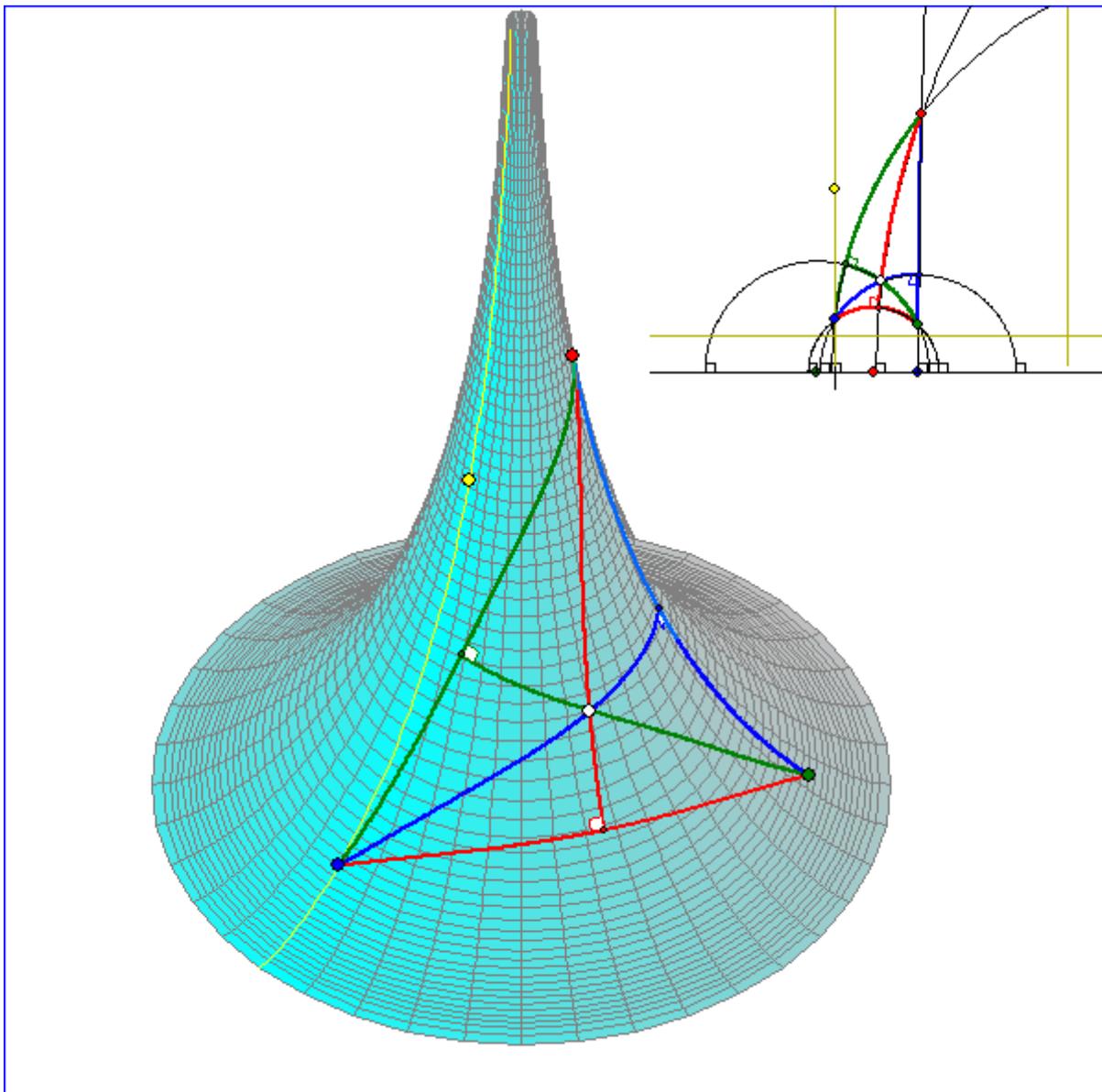


Abb. 13

Aus der Definition ergibt sich, dass den kartesischen Koordinaten w und s im Poincare-Modell die Größen w und $\frac{1}{r}$ bei der Pseudosphäre entsprechen, die dort für die

Polarkoordinaten-Darstellung benutzt wurden. Die Abbildungen 13 und 14 verdeutlicht den Zusammenhang zwischen Poincare-Modell und Pseudosphäre. Die gelb-graue Verbindung des gelben und blauen Punkts im Poincare-Modell entspricht dem Nullmeridian der Pseudosphäre in der nullten Schicht, die Parallele dazu dem Nullmeridian in der ersten Schicht der Riemann-Fläche. Die gelb-graue Parallele zur Rechts-Achse entspricht dem unteren Rand der Pseudosphäre. Der Teil des Poincare-Modells zwischen dieser Geraden und der Rechts-Achse hat keine Entsprechung bei der Riemann-Fläche der Pseudosphäre. Während sich in Abbildung 13 die Höhen-Geodäten in einem Punkt schneiden, ist das in Abbildung 14 auf der Pseudosphäre nicht der Fall, dennoch sind die P-Höhen-Geraden im Poincare-Modell auch hier kopunktal.

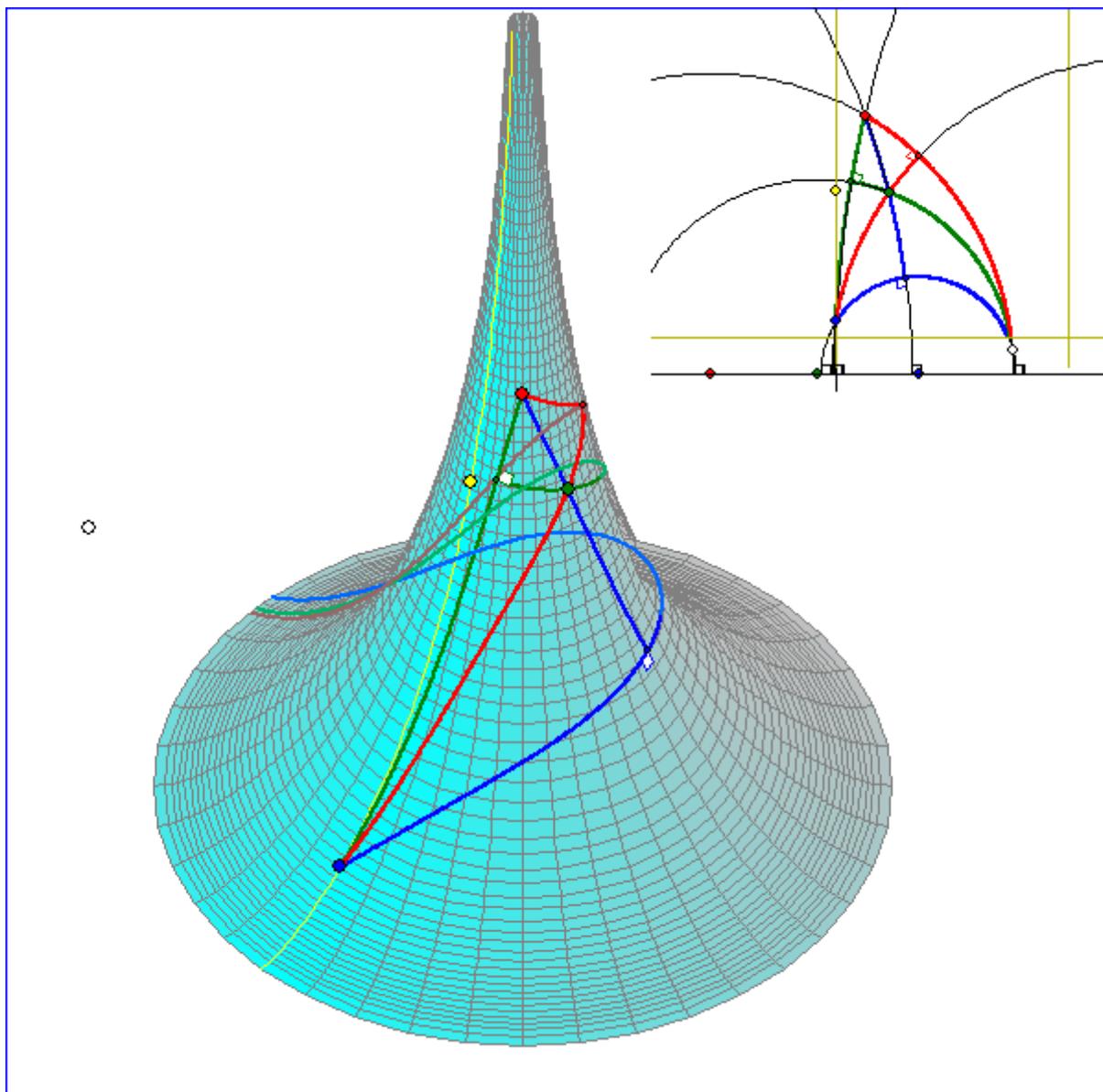


Abb. 14

Zur Untersuchung der Geometrie des Poincare-Modells betrachten wir folgende Grundaufgaben:

1. Finde zu zwei P-Punkten A und B eine P-Verbindungsgerade g.
2. Finde zu zwei P-Geraden g und h einen P-Schnittpunkt A.
3. Finde zu zwei P-Geraden g und h ein gemeinsames P-Lot j, d.h. eine P-Gerade, die sowohl zu g als auch zu h orthogonal ist.
4. Finde zu einem P-Punkt A und einer P-Geraden g ein P-Lot zu g durch A.
5. Finde zu einem P-Punkt A und einer P-Geraden g ein P-Gerade durch A, die zu g hyperbolisch parallel ist.

Wir suchen zunächst konstruktive Lösungen mit Zirkel und Lineal und geben dann in Satz 12 rechnerische Lösungen an.

Aufgabe 1 : Wenn A und B auf einer Meridiangeraden liegen, dann ist diese eine P-Verbindungsgerade. Andernfalls schneidet die Mittelsenkrechte von A und B die Rechtsachse in einem Punkt M, der Mittelpunkt einer P-Geraden g durch A und B ist. Eine P-Verbindungsgerade gibt es also immer und sie ist für verschiedene Punkt A, B eindeutig.

Aufgabe 2 : Diese Aufgabe ist offenbar nur unter Bedingungen lösbar. Verschiedene Meridiangeraden haben keinen P-Schnittpunkt. Eine Meridiangerade g und eine Kreisgerade h haben nur dann einen P-Schnittpunkt, wenn der Abstand des Mittelpunkts von h kleiner ist als der Radius. Zwei Kreisgeraden haben nur dann einen P-Schnittpunkt, wenn der Abstand ihrer Mittelpunkte kleiner als die Summe der Radien ist.

Wenn es einen P-Schnittpunkt gibt, dann ist er eindeutig.

Aufgabe 3 :

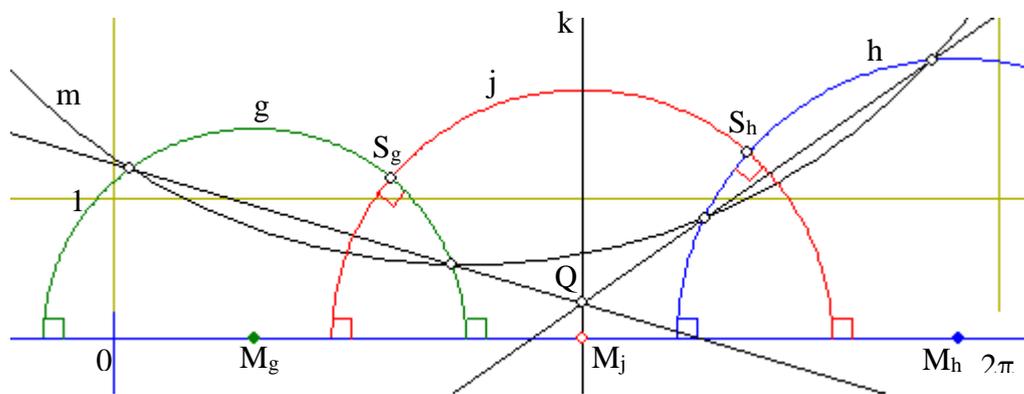


Abb.15

In Abbildung 15 sind g und h Kreisgeraden ohne einen gemeinsamen P-Punkt und ist m ein beliebiger Kreis, der g und h schneidet. Q ist der Schnittpunkt der Potenzgeraden von m, g und m, h. Die Potenzgerade k von g, h geht nach Satz 9 durch Q und ist orthogonal zur Verbindungsgeraden der Mittelpunkte M_g und M_h . M_j ist der Schnittpunkt von k mit der Rechtsachse. S_g und S_h sind die Schnittpunkte der Thaleskreise über M_gM_j bzw. M_hM_j mit g bzw. h. Der Kreis j um M_j durch S_g und S_h steht dann nach Satz 9 senkrecht zu g und h. Die Dreiecke $M_jS_gM_g$ und $M_jS_hM_h$ haben also einen rechten Winkel bei S_g bzw. S_h .

Diese Konstruktion ist auch dann durchführbar, wenn g und h einen P-Punkt gemeinsam haben. Dann liegt der Mittelpunkt des zu g und h orthogonalen Kreises aber nicht auf der Rechtsachse. Wenn g und h ein Ende gemeinsam haben, liegt M_j zwar auf der Rechtsachse, der zugehörige Kreis hat aber den Radius Null, gehört also zu keiner Kreisgeraden.

Wenn g eine Kreisgerade und die zweite P-Gerade eine nicht scheidende Meridiangerade ist, dann erhält man eine gemeinsame Orthogonale, indem die Meridiangerade die Rolle von k in Abbildung 15 übernimmt.

Die Konstruktion zeigt, dass es zu je zwei P-Geraden, die keinen P-Punkt gemeinsam haben und nicht hyperbolisch parallel sind, genau eine P-Gerade gibt, die zu beiden orthogonal ist. Das bedeutet insbesondere, dass ein Viereck mit drei rechten Winkeln, bei dem keine Eckpunkte zusammenfallen, keinen vierten rechten Winkel haben kann.

Dieser Sachverhalt ergibt sich auch aus den Eigenschaften der im vorigen Abschnitt untersuchten Kreisbüschel. Denn wenn zwei Kreise keine gemeinsamen Punkte haben, dann erzeugen sie ein hyperbolisches Büschel aus Kreisen, zu dem die Kreise des zugehörigen orthogonalen elliptischen Büschels ihren Mittelpunkt auf der Potenzgeraden des hyperbolischen Büschels haben.

Aufgabe 4 (siehe Abb. 16): Zur Konstruktion der P-Lotgeraden j vom P-Punkt A auf die P-Gerade g wird ein beliebiger Kreis m durch A benutzt, der den Halbkreis g schneidet. Die Potenzgerade von m und dem Nullkreis von A ist dann die Tangente an m in A . Man erkennt dies, indem man den Nullkreis als Grenzfall eines Kreises um A mit positivem Radius ansieht, dessen Radius gegen Null strebt. Der Schnittpunkt Q dieser Tangente mit der Potenzgeraden von g , m liegt dann auf der Potenzgeraden k von g und dem Nullkreis von A . k ist darum nach Satz 9 die Lotgerade von Q auf die Verbindungsgerade von M_g und A . Der Schnittpunkt von k mit der Rechtsachse hat darum die gleiche Potenz bezüglich g und des Nullkreises von A . Darum hat der Berührungspunkt S_g der Tangente von M_j an den Halbkreis g den gleichen Abstand von M_j wie A von M_j . Der Kreis j um M_j mit dem Radius $|\overline{MA}|$ geht darum durch A und steht senkrecht zu g .

Diese Konstruktion gelingt nur dann, wenn A nicht auf einer Meridiangeraden durch M_g liegt. In dem Fall ist aber diese Meridiangerade ein P-Lot von A auf g .

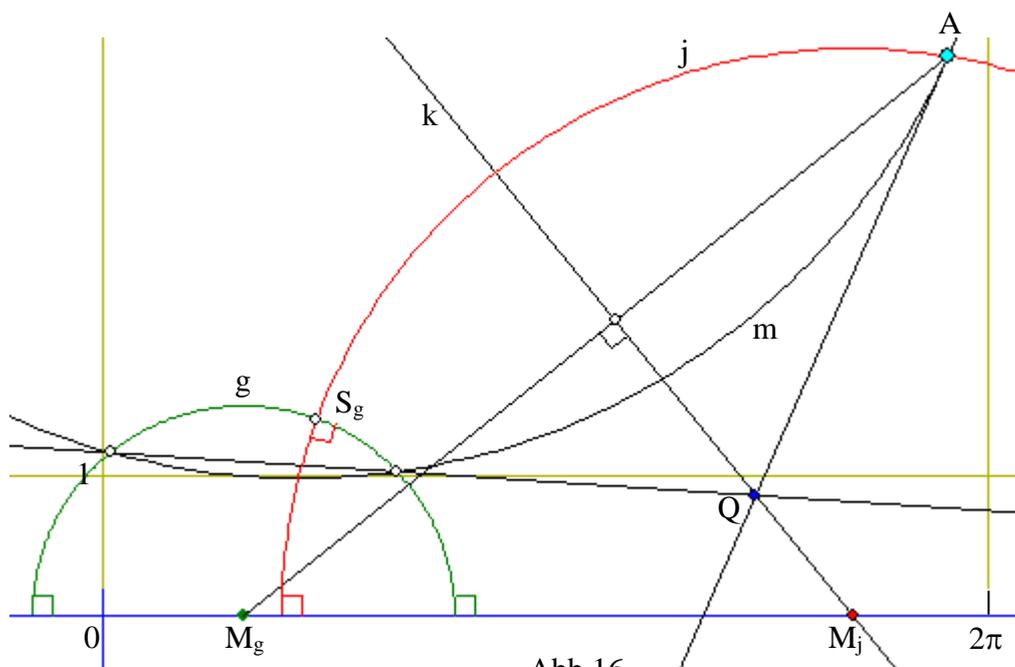


Abb.16

Aufgabe 5 : Q sei ein Ende von g. Wenn Q auf einer Parallelen durch A zur Hochachse liegt, ist die zugehörige Meridiangerade eine gesuchte hyperbolische Parallele. Andernfalls schneidet die Mittelsenkrechte von A und Q die Rechtsachse in einem Punkt M_h , der Mittelpunkt einer Kreisgeraden h durch Q ist. Das Verfahren führt für jedes Ende zu einer eindeutigen hyperbolischen Parallelen.

Diese Konstruktionen zeigen folgende Grundeigenschaften, die in jedem vollständigem Modell der hyperbolischen Geometrie erfüllt sind:

1. Zu je zwei verschiedenen ‚Punkten‘ A und B, gibt es genau eine ‚Verbindungsgerade‘.
2. Zu je zwei verschiedenen ‚Geraden‘ g und h, die nicht hyperbolisch parallel sind, gibt es entweder genau einen gemeinsamen ‚Punkt‘ oder genau eine gemeinsame ‚Senkrechte‘.
3. Zu jedem ‚Punkt‘ A und jeder ‚Geraden‘ g gibt es genau eine ‚Gerade‘ durch A, die senkrecht zu g ist.
4. Zu jeder ‚Geraden‘ g und jedem ‚Punkt‘ A, der nicht auf g liegt, gibt es genau zwei ‚Geraden‘ durch A, die zu g hyperbolisch parallel sind.

Von diese Grundeigenschaften ist auf der Riemann-Fläche der Pseudosphäre mit den Geodäten als ‚Geraden‘ nur die 1. Eigenschaft erfüllt. Insofern repräsentiert sie nur eine unvollständige hyperbolische Geometrie. ‚Hyperbolisch‘ ist die Geometrie der Pseudosphäre dennoch, da Winkel- und Abstands-Beziehungen die gleichen sind wie im Poincare-Modell.

11. Inzidenz und Orthogonalität im Poincare-Modell

Satz 13 klärt die Inzidenz- und Orthogonalitäts-Eigenschaften des Poincare-Modells mit algebraischen Methoden.

Satz 13 : Gegeben sei das Poincare-Modell mit der Punktmenge P^P und der Geradenmenge G^P .

1. Inzidenz: $(w ; s)^P \in P^P$ liegt auf der Kreisgeraden $[w_0 ; s_0]^P$ genau dann, wenn $(w_0 - w)^2 = s_0^2 - s^2$. Er liegt auf der Meridiangeraden $[w_0]^P$ genau dann, wenn $w_0 = w$.
2. Verschiedene P-Punkte $(w_1 ; s_1)^P$ und $(w_2 ; s_2)^P$ haben stets genau eine P-Verbindungsgerade.

Im Fall $w_1 \neq w_2$ ist es die P-Gerade $[w_0 ; s_0]^P$ mit $w_0 = \frac{w_1^2 - w_2^2 + s_1^2 - s_2^2}{2 \cdot (w_1 - w_2)}$ und

$$s_0 = \frac{\sqrt{(w_0 - w_1)^2 + s_1^2}}{2 \cdot |w_1 - w_2|} = \frac{\sqrt{(s_1^2 + s_2^2 + (w_1 - w_2)^2)^2 - 4 \cdot s_1^2 \cdot s_2^2}}{2 \cdot |w_1 - w_2|}.$$

Im Fall $w_1 = w_2$ ist es die P-Gerade $[w_1]^P$.

3. Orthogonalität : Die P-Gerade $[w_1 ; s_1]^P$ schneidet die P-Gerade $[w_2 ; s_2]^P$ genau dann senkrecht in einem P-Punkt, wenn $(w_1 - w_2)^2 = s_1^2 + s_2^2$ gilt. Der P-Schnittpunkt

ist dann $\left(w_1 + \frac{s_1^2}{w_2 - w_1} ; \frac{s_1 \cdot s_2}{|w_2 - w_1|} \right)$.

$[w_1 ; s_1]^P$ schneidet die P-Gerade $[w_2]^P$ genau dann senkrecht in einem P-Punkt, wenn $w_1 = w_2$. Der P-Schnittpunkt ist dann $(w_1 ; s_1)^P$.

4. $g_1 : [w_1 ; s_1]^P$ und $g_2 : [w_2 ; s_2]^P$ seien verschiedene P-Geraden.

1. Fall: $|s_1^2 + s_2^2 - (w_1 - w_2)^2| = 2 \cdot s_1 \cdot s_2$. Dann sind g_1 und g_2 hyperbolisch parallel.

2. Fall: $|s_1^2 + s_2^2 - (w_1 - w_2)^2| < 2 \cdot s_1 \cdot s_2$. Dann gibt es einen einzigen gemeinsamen P-Punkt, nämlich

$$\left(\frac{w_1^2 - w_2^2 - (s_1^2 - s_2^2)}{2 \cdot (w_1 - w_2)} ; \frac{\sqrt{-(s_1^2 + s_2^2 - (w_1 - w_2)^2)^2 + 4 \cdot s_1^2 \cdot s_2^2}}{2 \cdot |w_1 - w_2|} \right)^P,$$

3. Fall: $|s_1^2 + s_2^2 - (w_1 - w_2)^2| > 2 \cdot s_1 \cdot s_2$. Dann gibt es eine einzige gemeinsame P-Lotgerade, nämlich im Fall $w_1 = w_2$ die Meridiangerade $[w_1]^P$ und sonst die

$$\text{Kreisgerade} \left[\frac{w_1^2 - w_2^2 - (s_1^2 - s_2^2)}{2 \cdot (w_1 - w_2)} ; \frac{\sqrt{(s_1^2 + s_2^2 - (w_1 - w_2)^2)^2 - 4 \cdot s_1^2 \cdot s_2^2}}{2 \cdot |w_1 - w_2|} \right]^P.$$

Beweis : 1. Der P-Punkt $(w ; s)^P$ liegt auf der P-Geraden $[w_0 ; s_0]^P$ genau dann, wenn die Punkte mit den kartesischen Koordinaten $(w_0 ; 0)$, $(w ; 0)$ und $(w ; s)$ ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei $(w ; 0)$ bilden. Das ist aber äquivalent mit $(w_0 - w)^2 + s^2 = s_0^2$.

2. $[w_0 ; s_0]^P$ ist genau dann P-Verbindungsgerade der P-Punkte $(w_1 ; s_1)^P$ und $(w_2 ; s_2)^P$, wenn $(w_0 - w_1)^2 = f_0 \cdot s_0^2 + f_1 \cdot s_1^2$ und $(w_0 - w_2)^2 = f_0 \cdot s_0^2 + f_2 \cdot s_2^2$ mit $f_0 = 1$ und $f_1 = f_2 = -1$ gilt. Daraus folgt die Behauptung nach Hilfssatz 1.

3. Die P-Gerade $[w_1 ; s_1]^P$ schneidet die P-Gerade $[w_2 ; s_2]^P$ genau dann senkrecht in einem P-Punkt $(w_0 ; s_0)^P$, wenn die Punkte mit den kartesischen Koordinaten $(w_1 ; 0)$, $(w_2 ; 0)$ und $(w_0 ; s_0)$ ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei $(w_0 ; s_0)$ bilden. Das ist nach dem Satz von Pythagoras äquivalent mit $(w_1 - w_2)^2 = s_1^2 + s_2^2$, $(w_0 - w_2)^2 = -s_0^2 + s_2^2$ und $(w_2 - w_1)^2 = s_1^2 + s_2^2$ und die zweite Behauptung von Hilfssatz 1 ist anwendbar.

4. Im Fall $|s_1^2 + s_2^2 - (w_1 - w_2)^2| = 2 \cdot s_1 \cdot s_2$ ist $(w_1 - w_2)^2 = s_1^2 + s_2^2 - 2 \cdot s_1 \cdot s_2 = (s_1 - s_2)^2$ oder $(w_1 - w_2)^2 = s_1^2 + s_2^2 + 2 \cdot s_1 \cdot s_2 = (s_1 + s_2)^2$. In beiden Unter-Fällen berühren sich die zu g_1 und g_2 gehörigen Kreise.

Wenn $|s_1^2 + s_2^2 - (w_1 - w_2)^2| < 2 \cdot s_1 \cdot s_2$, dann ist $w_1 \neq w_2$ und

$$(w_0 ; s_0)^P = \left(\frac{w_1^2 - w_2^2 - (s_1^2 - s_2^2)}{2 \cdot (w_1 - w_2)} ; \frac{\sqrt{-(s_1^2 + s_2^2 - (w_1 - w_2)^2)^2 + 4 \cdot s_1^2 \cdot s_2^2}}{2 \cdot |w_1 - w_2|} \right)^P \text{ gemeinsamer P-Punkt}$$

von g_1 und g_2 . Es ist der einzige gemeinsame P-Punkt. Dies folgt mit Hilfssatz 1 aus

$(w_0 - w_1)^2 = f_0 \cdot s_0^2 + f_1 \cdot s_1^2$ und $(w_0 - w_2)^2 = f_0 \cdot s_0^2 + f_2 \cdot s_2^2$ mit $f_0 = -1$ und $f_1 = f_2 = 1$.

Wenn $|s_1^2 + s_2^2 - (w_1 - w_2)^2| > 2 \cdot s_1 \cdot s_2$ und $w_1 \neq w_2$, dann ist

$$[w_0; s_0]^P = \left[\frac{w_1^2 - w_2^2 - (s_1^2 - s_2^2)}{2 \cdot (w_1 - w_2)}; \frac{\sqrt{(s_1^2 + s_2^2 - (w_1 - w_2)^2)^2 - 4 \cdot s_1^2 \cdot s_2^2}}{2 \cdot |w_1 - w_2|} \right]^P$$

eine P-Gerade, die so

wohl auf g_1 , als auch auf g_2 senkrecht steht, und sie ist wieder nach Hilfssatz 1 die einzige.

Im Fall $w_1 = w_2$ sind die Kreisgeraden konzentrisch und darum $[w_1]^P$ die einzige gemeinsame P-Lotgerade. \square

Die erste Behauptung von Satz 13 macht den Zusammenhang zwischen der Riemann-Fläche der Pseudo-Sphäre und dem Poincare-Modell deutlich. Der Punkt der Riemann-Fäche mit den Polarkoordinaten $(r; w)$ liegt genau dann auf der Geödate $[r_0; w_0]$, wenn im Poincare-Modell

$$\left(w; \frac{1}{r} \right)^P \text{ Punkt der Kreisgeraden } \left[w_0; \frac{1}{r_0} \right]^P \text{ ist. Entsprechendes gilt auch für die}$$

Meridiangeraden. Die Einbettungs-Abbildung $(r; w) \rightarrow \left(w; \frac{1}{r} \right)^P$ ist also inzidentreu. Wegen

der 3. Behauptung ist sie auch orthogonalitätstreu, und aus der Definition des Abstands im Poincare-Modell folgt unmittelbar, dass sie auch den Abstand erhält. In Satz 18 werden diese Ergebnisse noch einmal zusammengefasst und um die allgemeine Winkeltreue ergänzt.

Vorher sollen aber noch weitere Eigenschaften des Poincare-Modells untersucht werden.

12. Kreise und Abstandskurven im Poincare-Modell

Satz 14: Es sei $H(w_H; s_H)^P$ ein P-Punkt und $c > 1$ eine Zahl. K_c sei der (euklidische) Kreis mit dem (euklidischen) Mittelpunkt $E(w_H; s_E)^P$, wobei $s_E := 0,5 \cdot \left(c + \frac{1}{c} \right) \cdot s_H$ und der

(euklidischen) Radius $\rho_e := 0,5 \cdot \left(c - \frac{1}{c} \right) \cdot s_H$ ist.

(E steht für ‚euklidisch‘, H für ‚hyperbolisch‘.) Dann gilt:

1. Jede Kreisgerade durch H ist orthogonal zu K_c .
2. Alle P-Punkte auf K_c haben von H den gleichen P-Abstand $\rho_h = \ln(c)$.
3. $s_E = \cosh(\rho_h) \cdot s_H$ und $\rho_e = \sinh(\rho_h) \cdot s_H$. s_H ist das geometrische Mittel der s-Werte zu den Schnittpunkten von K_c mit der Meridiangeraden durch H und E.
4. Für den Term von K_c gilt $(w - w_H)^2 + (s - s_E)^2 - \rho_e^2 = (w - w_H)^2 + (s - s_H)^2 + \lambda \cdot s$ mit $\lambda := (2 - c - 1/c) \cdot s_H$. K_c liegt also in dem vom Nullkreis von H und der Rechtsachse erzeugten Büschel.
5. σ_g sei die euklidische Achsenspiegelung an einer Meridian-Geraden g oder die Kreisspiegelung an einer Kreisgeraden g. Dann wird K_c durch σ_g auf einen Kreis abgebildet, dessen Punkte von $H\sigma_g$ alle den P-Abstand $\ln(c)$ haben.

Beweis: Der P-Abstand und die Orthogonalität verändern sich nicht bei Verschiebung in Richtung der Rechtsachse. Darum reicht es, den Beweis für $w_H = 0$ zu führen.

1. Jede Kreisgeraden durch H kann mit einem Paar $[w_0; s_0]^P$ mit $s_0 := \sqrt{w_0^2 + s_H^2}$ beschrieben werden. Das Quadrat des Abstands ihres Zentrums vom euklidischen K_c -Mittelpunkt ist $w_0^2 + 0,25 \cdot \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \cdot s_H^2$. Dieses Quadrat stimmt wegen $0,25 \cdot \left(c - \frac{1}{c}\right)^2 + 1 = 0,25 \cdot \left(c + \frac{1}{c}\right)^2$ mit $0,25 \cdot \left(c - \frac{1}{c}\right)^2 \cdot s_H^2 + s_0^2$ überein. Nach dem Satz von Pythagoras sind die Kreise darum orthogonal.

2. Der Kreis durch H zu $[w_0; s_0]^P$ mit $s_0 = \sqrt{w_0^2 + s_H^2}$ hat die Gleichung

$$0 = (w - w_0)^2 + s^2 - s_0^2. \text{ Die Gleichung von } K_c \text{ ist}$$

$$0 = w^2 + \left(s - 0,5 \cdot \left(c + \frac{1}{c}\right) \cdot s_H\right)^2 - \left(0,5 \cdot \left(c - \frac{1}{c}\right) \cdot s_H\right)^2 = w^2 + s^2 - \left(c + \frac{1}{c}\right) \cdot s_H \cdot s + s_H^2. \text{ Die}$$

Schnittpunkte der beiden Kreise haben die w-Koordinaten

$$w_{\pm} = \frac{s_H^2 \cdot (c^2 - 1) \cdot (\pm s_0 \cdot (c^2 + 1) + w_0 \cdot (c^2 - 1))}{4 \cdot w_0^2 \cdot c^2 + s_H^2 \cdot (c^2 + 1)^2}.$$

Der signierte P-Abstand des Schnittpunkts $(w_{\pm}; s_{\pm})$ von H ist

$$0,5 \cdot \ln \frac{w_{\pm} - (w_0 - s_0)}{(w_0 + s_0) - w_{\pm}} - 0,5 \cdot \ln \frac{-(w_0 - s_0)}{(w_0 + s_0)}.$$

Die Einsetzung ergibt für w_+ bzw. w_- den signierten P-Abstand $\ln(c)$ bzw. $-\ln(c)$.

Die P-Schnittpunkte der Meridiangeraden $[0]^P$ mit dem Kreis K_c sind $(0; c \cdot s_H)$ und

$$\left(0; \frac{s_H}{c}\right), \text{ ihr P-Abstand von H also } \ln \frac{s_H}{c \cdot s_H} = -\ln(c) \text{ und } \ln \frac{s_H \cdot c}{s_H} = \ln(c).$$

3. $s_E = 0,5 \cdot (e^{\rho_h} + e^{-\rho_h}) = \cosh(\rho_h) \cdot s_H$ und $\rho_e = 0,5 \cdot (e^{\rho_h} - e^{-\rho_h}) = \sinh(\rho_h) \cdot s_H$. Die Schnittpunkte der Meridiangeraden durch H und E haben die s-Werte $s_E + \rho_E$ und $s_E - \rho_E$, deren Produkt s_H^2 ist.

4. ergibt sich durch Ausmultiplizieren.

5. Da Spiegelungen an Parallelen zur Hochachse und Verschiebungen parallel zur Rechtsachse den P-Abstand nicht verändern, muss die Aussage nur noch für eine Kreisgerade g mit Mittelpunkt im Ursprung gezeigt werden. r sei der zugehörige Radius. Dann ist das Bild

eines Punktes $(w; s)^P$ durch $\left(\frac{r^2 \cdot w}{w^2 + s^2}; \frac{r^2 \cdot s}{w^2 + s^2}\right)$ gegeben. Die Einsetzung dieser beiden

Komponenten für s und w in den Term

$$(w - w_H)^2 + \left(s - 0,5 \cdot \left(c + \frac{1}{c}\right) \cdot s_H\right)^2 - \left(0,5 \cdot \left(c - \frac{1}{c}\right) \cdot s_H\right)^2 \text{ von } K_c \text{ und anschließende}$$

Multiplikation von $\frac{w^2 + s^2}{w_H^2 + s_H^2}$ ergibt

$$w^2 - \frac{2 \cdot r^2 \cdot w_H}{s_H^2 + w_H^2} \cdot w + s^2 - \frac{\left(c + \frac{1}{c}\right) \cdot r^2 \cdot s_H}{s_H^2 + w_H^2} \cdot s + \frac{r^4}{s_H^2 + w_H^2} =$$

$$\left(w - \frac{r^2 \cdot w_H}{s_H^2 + w_H^2} \right)^2 + \left(s - \frac{0,5 \cdot \left(c + \frac{1}{c} \right) \cdot r^2 \cdot s_H}{s_H^2 + w_H^2} \right)^2 - \left(\frac{0,5 \cdot \left(c - \frac{1}{c} \right) \cdot r^2 \cdot s_H}{s_H^2 + w_H^2} \right)^2 =$$

$$\left(w - w_{\hat{H}} \right)^2 + \left(s - 0,5 \cdot \left(c + \frac{1}{c} \right) \cdot s_{\hat{H}} \right)^2 - \left(0,5 \cdot \left(c - \frac{1}{c} \right) \cdot s_{\hat{H}} \right)^2$$

mit den Komponenten $w_{\hat{H}} = \frac{r^2 \cdot w_H}{s_H^2 + w_H^2}$ und $s_{\hat{H}} = \frac{r^2 \cdot s_H}{s_H^2 + w_H^2}$ des Punktes $\hat{H} = H\sigma_g$.

Nach 2. haben alle P-Punkte auf diesem Kreis von \hat{H} den gleichen P-Abstand $\ln(c)$. \square

Aus der 5. Behauptung von Satz 14 folgt, dass nicht nur die euklidischen Achsenspiegelungen an Meridian-Geraden den P-Abstand erhalten, sondern auch die Kreisspiegelungen an Kreis-Geraden. Außerdem bleibt nach Satz 11 der Betrag der euklidischen Winkelgröße erhalten, also auch die P-Winkelgröße. Wie in der euklidischen Geometrie ändern sich aber die Vorzeichen beim signierten P-Abstand und auch bei der Winkelgröße.

Definition : Die P-Spiegelung σ_g an einer P-Geraden g wird darum folgendermaßen definiert:

Im Fall einer Kreisgeraden g ist σ_g die Restriktion der Kreisspiegelung an g auf die Menge der P-Punkte, im Fall einer Meridiangeraden ist es die Restriktion der zugehörigen euklidischen Achsenspiegelung.

Die P-Spiegelung σ_Q an einen P-Punkt Q ist die Abbildung der Menge der P-Punkte auf sich, für die $Q\sigma_Q = Q$ gilt und die einen P-Punkt $R \neq Q$ auf den Punkt R' abbildet, der auf der P-Geraden durch Q und R liegt und den gleichen P-Abstand von Q hat wie R .

Satz 14 zeigt, dass der P-Punkt H der P-Mittelpunkt von K_c ist, und folglich die P-Spiegelung σ_H den Kreis K_c auf sich abbildet.

Wenn sich P-Geraden g und h im Punkt Q schneiden, dann gilt wegen der Winkel-Treue der Kreis- und Achsen-Spiegelungen für die Richtungswinkel

$$\angle(g; Q) - \angle(h; Q) = \angle(h; g; Q) = \angle(g, h\sigma_g; Q) = \angle(h\sigma_g; Q) - \angle(g; Q), \text{ folglich}$$

$$\angle(h\sigma_g; Q) = 2 \cdot \angle(g; Q) - \angle(h; Q).$$

Definition : Unter einem P-Kreis K mit P-Mittelpunkt H und P-Radius ρ_h verstehen wir die Menge der P-Punkte, die von H den P-Abstand ρ_h haben.

Aus Satz 14 folgt, dass die P-Kreise (hyperbolischen Kreise) die euklidischen Kreise sind, die vollständig in der oberen Halbebene der Rechtsachse liegen. Die P-Kreise mit dem gleichen P-Mittelpunkt H liegen in dem hyperbolischen Kreisbüschel, dessen Nullkreis-Punkte H und der Punkt H' sind, der durch Spiegelung von H an der Rechtsachse entsteht, und dessen Potenzgerade die Rechtsachse ist. Die P-Kreise bilden die ‚obere Hälfte‘ der hyperbolischen Kreisbüschel mit derartigen Nullkreis-Punkte-Paaren H, H' , während die P-Geraden die ‚obere Hälfte‘ der elliptischen Kreisbüschel mit gemeinsamen Punkte H, H' bilden, die achsensymmetrisch zur Rechtachse liegen.

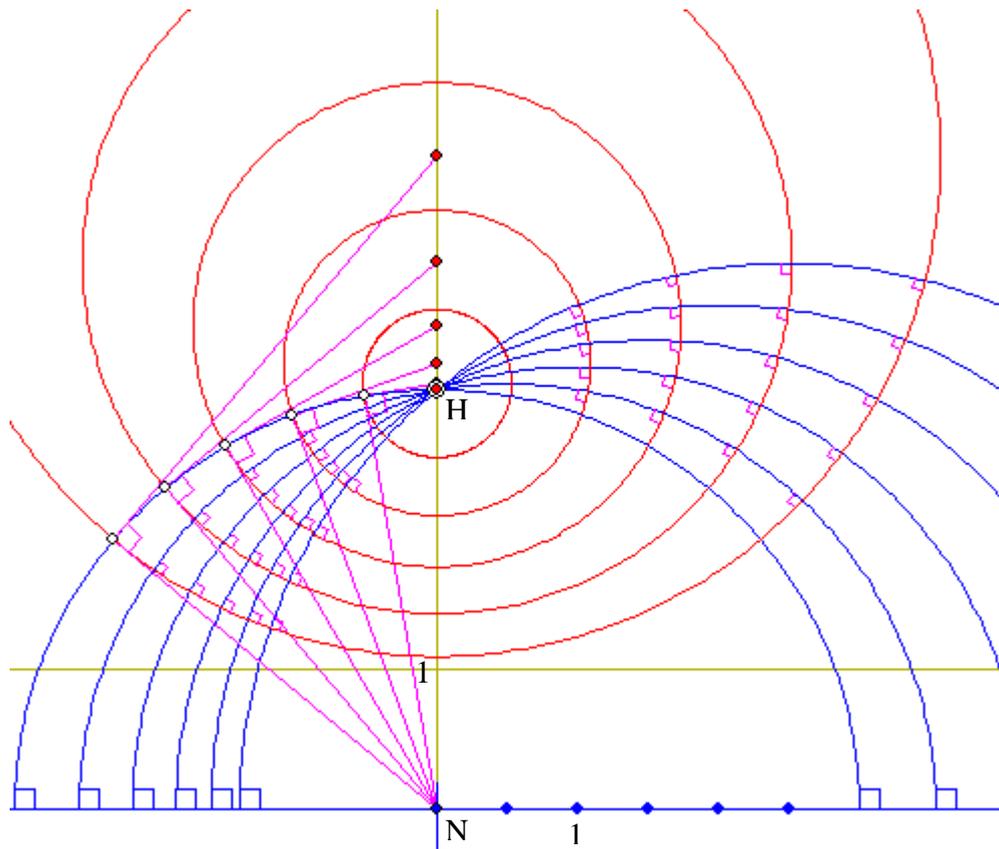


Abb. 17

In Abbildung 17 sind verschiedene P-Kreise zu dem P-Zentrum $H(0; 3)^P$ rot eingezeichnet. Sie ergeben sich konstruktiv aus den magentafarbenen rechtwinkligen Dreiecken mit einer Kathetenlänge 3 und den Winkeln $\alpha \in \{10^\circ; 20^\circ; 30^\circ; 40^\circ; 50^\circ\}$ beim Ursprung N. Denn der Kreis mit dem Radius 3 um N ist orthogonal zu allen roten Kreisen. Ihre c-Werten sind

darum $c = \frac{1}{\cos(\alpha)} + \tan(\alpha)$, denn für diese c-Werte ist $0,5 \cdot \left(c + \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$ und

$0,5 \cdot \left(c - \frac{1}{c}\right) = \tan(\alpha)$. Die euklidischen Zentren dieser Kreise haben folglich die Koordinaten

$\left(0; \frac{3}{\cos(\alpha)}\right)$ und die euklidischen Radien $3 \cdot \tan(\alpha)$.

K_c schneidet die Hochachse in den Punkten $S_1(0; c \cdot s_H)$ und $S_2(0; \frac{s_H}{c})$. Die Teilverhältnisse, in denen S_1 und S_2 die Strecke HN teilen, unterscheiden sich folglich nur im Vorzeichen.

Die blau gezeichneten Halbkreise stellen Kreisgeraden durch H dar, auf denen im Beweis von Satz 14 die Abstände bestimmt werden. Jeder Punkt auf der Rechtsachse hat zu allen roten Kreisen die gleiche Potenz. Die Halbkreise gehören zu einem elliptischen Kreisbüschel und die roten Kreise zum dazu orthogonalen hyperbolischen Kreisbüschel.

Definition : Unter dem Abstand eines P-Punktes Q von einer P-Geraden g verstehen wir den Abstand, den Q von dem P-Lotfußpunkt auf g hat. Die Menge der P-Punkte, die von g den gleichen P-Abstand haben und auf der gleichen Seite von g liegen, bezeichnen wir als P-Abstandskurve zu g.

Satz 15 :

1. $h = [w_0]^P$ sei eine Meridian-Gerade und j eine Gerade durch den Grenzpunkt von h auf der Rechtsachse mit einer Steigung $a > 0$. Die Menge der P-Punkte auf j sei mit j^+ bezeichnet und die Menge der P-Punkte, die auf der Geraden j' liegen, der durch Spiegelung von j an Rechtsachse entsteht mit j^- . Dann haben die Punkte in $j^+ \cup j^-$ alle den gleichen P-Abstand $\left| \ln \frac{\sqrt{1+a^2} + 1}{a} \right|$ von h .
2. $g = [w_0 ; s_0]^P$ sei eine Kreis-Gerade und k ein Kreis durch die Grenzpunkte von g . Die Menge der P-Punkte auf k sei mit k^+ bezeichnet und die Menge der P-Punkte, die auf dem Kreis k' liegen, der durch Spiegelung von k an Rechtsachse entsteht mit k^- . Dann haben die Punkte in $k^+ \cup k^-$ alle den gleichen P-Abstand von g .

Beweis : Da Verschiebungen parallel zur Rechtsachse P-Abstände nicht verändern, reicht es, den Satz für $w_0 = 0$ zu beweisen.

1. $Q = (w_Q ; a \cdot w_Q)^H$ sei ein P-Punkt auf j und m die zu h orthogonale P-Gerade durch Q . m ist eine Kreisgerade $[0 ; s_m]^P$ mit dem Zentrum im Ursprung und dem euklidischen Abstand $s_m = \sqrt{1+a^2} \cdot w_Q$ des Ursprungs von Q als Radius. Der P-Lotfußpunkt von Q auf h ist Scheitelpunkt von m . Der signierte P-Abstand des Punktes Q von h ist darum

$$0,5 \cdot \ln \frac{s_m + w_Q}{s_m - w_Q} = 0,5 \cdot \ln \frac{\sqrt{1+a^2} + 1}{\sqrt{1+a^2} - 1} = 0,5 \cdot \ln \frac{(\sqrt{1+a^2} + 1)^2}{1+a^2 - 1} = \ln \frac{\sqrt{1+a^2} + 1}{a} \text{ „ also unabhängig}$$

von w_Q . Alle Punkte von j^+ haben darum den gleichen P-Abstand. Die Punkte von j^- entstehen aus denen von j^+ durch Spiegelung an der Hochachse, haben also alle den signierten Abstand

$$0,5 \cdot \ln \frac{s_m - w_Q}{s_m + w_Q} = -0,5 \cdot \ln \frac{s_m + w_Q}{s_m - w_Q} = -\ln \frac{\sqrt{1+a^2} + 1}{a} .$$

2. Der Kreis k und der Kreis zu g gehören zu dem von den Grenzpunkten bestimmten elliptischen Kreisbüschel. Alle Kreise des zu den Grenzpunkten gehörigen hyperbolischen Kreisbüschels sind darum orthogonal zu g und zu k . Die obere Hälfte eines derartigen Kreises ist eine Kreisgerade m . Die Spiegelung an m lässt g und k fest und erhält den Winkelgrößen-Betrag und P-Abstand. Wenn Q und Q' zwei P-Punkte auf k^+ sind und der Mittelpunkt von m der Schnittpunkt der euklidischen Gerade QQ' mit der Rechtsachse, dann bildet σ_m den Punkt Q in Q' ab und wegen $g\sigma_m = g$ den P-Lotfußpunkt von Q auf g in den Lotfußpunkt von Q' auf g . Folglich haben Q und Q' den gleichen Abstand d von g .

Da k bei Spiegelung an g in einen Kreis k'' abgebildet wird und in den Grenzpunkten von g $\square(k;g) = \square(g;k'')$, muss $k' = k''$ sein. Darum haben alle Punkte von k^- ebenfalls alle den gleichen Abstand d . □

13. Maß-Form im Poincare-Modell

Ähnlich wie für die Pseudosphäre kann man auch für das Poincare-Modell eine Maß-Form μ_Q^P zur Berechnung von Längen und Winkeln mit Hilfe von Tangentenvektoren angeben.

Während man aber bei der Pseudosphäre auf die euklidische Maßbestimmung bei Vektoren im dreidimensionalen Raum \mathbf{R}^3 zurückgehen kann, muss man man beim Poincare-Modell an die Definition von Winkelgrößen und Abständen anschließen. Es ist das Ziel, zu jedem

P-Punkt Q eine Funktion μ_Q zu definieren, die jedem Paar von Tangentenvektoren $(\vec{t}_1; \vec{t}_2)$ in Q das Zahlenpaar $\left(\|\vec{t}_1\|^P \cdot \|\vec{t}_2\|^P \cdot \cos(\alpha); \|\vec{t}_1\|^P \cdot \|\vec{t}_2\|^P \cdot \sin(\alpha) \right)$ zuordnet, wobei $\|\vec{t}_1\|^P$ eine noch zu definierende Vektorlänge ist und α die euklidische Winkelgröße zwischen den beiden Vektoren. Beim Winkel α ist keine neue Definition nötig, weil die Winkelbestimmung im Poincare-Modell mit der euklidischen übereinstimmt. Darum gilt für Tangentenvektoren $\vec{t}_i = (w'_i; s'_i)$: $\cos(\alpha) = \frac{w'_1 \cdot w'_2 + s'_1 \cdot s'_2}{|t_1| \cdot |t_2|}$ und $\sin(\alpha) = \frac{w'_1 \cdot s'_2 - w'_2 \cdot s'_1}{|t_1| \cdot |t_2|}$ mit euklidischen Beträgen

$|t_i| = \sqrt{w_i'^2 + s_i'^2}$. Folglich ist

$$\mu_Q(\vec{t}_1; \vec{t}_2) = \left(\frac{\|\vec{t}_1\|^P \cdot \|\vec{t}_2\|^P}{|t_1| \cdot |t_2|} \cdot (w'_1 \cdot w'_2 + s'_1 \cdot s'_2); \frac{\|\vec{t}_1\|^P \cdot \|\vec{t}_2\|^P}{|t_1| \cdot |t_2|} \cdot (w'_1 \cdot s'_2 - w'_2 \cdot s'_1) \right). \text{ Die Quotienten } \frac{\|\vec{t}_i\|^P}{|t_i|}$$

ergeben sich dadurch, dass man für einen P-Punkt R den Abstand $\|\overline{QR}\|^P$ durch den euklidischen Abstand $|\overline{QR}|$ teilt und dann den Grenzwert für $R \rightarrow Q$ bestimmt. Da

Maßbestimmungen gegen Verschiebungen parallel zur Rechtsachse invariant sind, reicht es, Punkte Q und R auf dem Halbkreis $[0; s_0]^P$ um den Ursprung und auf der Hochachse $[0]^P$ zu betrachten. Sei $Q(s_0 \cdot \cos(\alpha); s_0 \cdot \sin(\alpha))$ und $R(s_0 \cdot \cos(\alpha - \beta); s_0 \cdot \sin(\alpha - \beta))$, so dass also R auf Q folgt, in Richtung der positiven Orientierung auf der Kreisgeraden. Dann ist

$$\|\overline{QP}\|^P = 0.5 \cdot \ln \frac{\cos(\alpha - \beta) + 1}{1 - \cos(\alpha - \beta)} - 0.5 \cdot \ln \frac{\cos(\alpha) + 1}{1 - \cos(\alpha)} \text{ und } |\overline{QR}| = 2 \cdot s_0 \cdot \sin(0.5 \cdot \beta). \text{ Die Ableitung}$$

nach β ergibt für $\beta = 0$ die Terme $\frac{1}{\sin(\alpha)}$ und s_0 . Nach der Regel von de l'Hospital ist also

$$\lim_{R \rightarrow Q} \frac{\|\overline{QR}\|^P}{|\overline{QR}|} = \frac{1}{s_0 \cdot \sin(\alpha)}, \text{ also der Kehrwert des euklidischen Abstands von R von der}$$

Rechtsachse.

Wenn Q und R auf der Hochachse liegen erhält man das gleiche Ergebnis: Für $Q = (0; a)$ und

$R = (0; a - b)$ mit $b > 0$ ist nämlich $\|\overline{QR}\|^P = \ln \frac{a}{a - b}$ und $|\overline{QR}| = b$. Die Ableitungen nach b

ergeben für $b = 0$ die Terme $\frac{1}{a}$ und 1.

Bemerkenswerter Weise sind also die Quotienten $\frac{\|\vec{t}_i\|^P}{|t_i|}$ unabhängig von der Richtung, anders als im Beltrami-Klein-Modell.

Definition : Die Maß-Form des Poincare-Modells zu einem Punkt $Q(w_Q; s_Q)$ und Tangentenvektoren $\vec{t}_i = (w'_i; s'_i)$ ist

$$\mu_Q^P((w'_1; s'_1); (w'_2; s'_2)) = \left(\frac{1}{s_Q^2} \cdot (w'_1 \cdot w'_2 + s'_1 \cdot s'_2); \frac{1}{s_Q^2} \cdot (w'_1 \cdot s'_2 - w'_2 \cdot s'_1) \right).$$

Mit Hilfe von Matrizen kann man die erste Komponente der Maß-Form beschreiben durch

$$\frac{1}{s_Q^2} \cdot (w'_1 \cdot w'_2 + s'_1 \cdot s'_2) = (w'_1, s'_1) \begin{pmatrix} \frac{1}{s_Q^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_Q^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w'_2 \\ s'_2 \end{pmatrix} \text{ und die zweite durch}$$

$$\frac{1}{s_Q^2} \cdot (w'_1 \cdot s'_2 - w'_2 \cdot s'_1) = (w'_1, s'_1) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{s_Q^2} \\ -\frac{1}{s_Q^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w'_2 \\ s'_2 \end{pmatrix}.$$

Um den Zusammenhang mit der Maß-Form der Pseudospäre zu verdeutlichen, definieren wir analog zu den Standard-Geodätenfunktionen Bewegungsfunktionen für die P-Geraden., bei denen man sich unter den Parametern w und r Zeit-Parameter vorstellen kann.

Definition : Die Funktion $w \rightarrow \left(w; \sqrt{s_0^2 - (w - w_0)^2} \right)$; $w_0 - s_0 < w < w_0 + s_0$ bezeichnen wir als Standard-Bewegungsfunktion der Kreisgeraden $[w_0; s_0]^P$ und die Funktion

$r \rightarrow \left(w_0; \frac{1}{r} \right)$; $r > 0$ als Standard-Bewegungsfunktion einer Meridiangeraden $[w_0]^P$.

$[w_1; s_1]^P$ und $[w_2; s_2]^P$ seien zwei Kreisgeraden, die sich im P-Punkt $Q = (w_0; s_0)^P$ schneiden.

Die Ableitung von $w \rightarrow s = \sqrt{s_i^2 - (w - w_i)^2}$ für $i \in \{1, 2\}$ ist $w \rightarrow \frac{-(w - w_i)}{\sqrt{s_i^2 - (w - w_i)^2}} = \frac{w_i - w}{s}$.

Tangentenvektoren im P-Punkt Q sind darum die Vektoren $(w'_i; s'_i) = \left(1; \frac{w_i - w_0}{s_0} \right)$ mit

$$\mu_Q((w'_i; s'_i); (w'_i; s'_i)) = \left(\frac{1}{s_0^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{s_0^2} \cdot (w_i - w_0)^2 \right); 0 \right) =$$

$$\left(\frac{1}{s_0^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{s_0^2} \cdot (w_i - w_0)^2 \right); 0 \right) = \left(\frac{1}{s_0^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{s_0^2} \cdot (s_i^2 - s_0^2) \right); 0 \right) = \left(\frac{s_i^2}{s_0^4}; 0 \right).$$

Als normierter Maß-Formwert für die Tangentenvektoren ergibt sich daraus mit dem Winkel α zwischen den

Vektoren $(\cos(\alpha); \sin(\alpha)) = \left(\frac{s_0^2}{s_1 \cdot s_2} + \frac{1}{s_1 \cdot s_2} \cdot (w_1 - w_0) \cdot (w_2 - w_0); \frac{s_0}{s_1 \cdot s_2} \cdot (w_2 - w_1) \right)$. Dieser

Term entsteht aus entsprechenden in Satz 7 durch Ersetzung von r_0 durch $\frac{1}{s_0}$.

Die Standard-Bewegungsfunktion einer Meridiangeraden $[w_0]^P$ hat die Ableitung $r \rightarrow -\frac{1}{r^2}$.

Der Tangentenvektor im Punkt Q ist darum $(w'_0; s'_0) = (0; -s_0^2)$ und der Maß-Formwert

$$\mu_Q^P((w'_0; s'_0); (w'_1; s'_1)) = \left(\frac{1}{s_0^2} \cdot \left(-s_0^2 \cdot \frac{w_1 - w_0}{s_0} \right); \frac{1}{s_0^2} \cdot (-1 \cdot (-s_0^2)) \right) = \left(\frac{w_0 - w_1}{s_0}; 1 \right),$$

ebenfalls im Einklang mit Satz 7.

Zur Berechnung der Länge des Wegs auf dem Halbkreis $[0 ; s_0]^P$ zwischen dem Scheitelpunkt $S = (0 ; s_0)^P$ und dem Punkt $Q = (w_Q ; s_Q)^P$ mit Hilfe der Maß-Form kann man folgendermaßen vorgehen: Wir benutzen die Größe α des Winkels als Variable, den der Ortsvektor \overline{NQ} vom Ursprung N zum Punkt Q auf diesem Weg mit der Rechtsachse bildet. Dann hat Q die Koordinaten $(s_0 \cdot \cos(\alpha); s_0 \cdot \sin(\alpha))$ und $(-s_0 \cdot \sin(\alpha); s_0 \cdot \cos(\alpha))$ ist der nach rechts gerichtete Tangentenvektor in Q. Die P-Vektorlänge ist nach der ersten Komponente der

Maß-Form $\frac{\sqrt{s_0^2 \cdot (\sin(\alpha))^2 + s_0^2 \cdot (\cos(\alpha))^2}}{s_0 \cdot \sin(\alpha)} = \frac{1}{\sin(\alpha)}$, und die Weglänge berechnet sich aus dem

Integral $-\int_{0,5\pi}^{\alpha_w} \frac{1}{\sin(\alpha)} d\alpha$, mit $\alpha_w = \arccos\left(\frac{w_Q}{s_0}\right)$ und Minus-Zeichen, weil in Richtung

abnehmender α -Werte integriert wird. Es ergibt sich $0,5 \cdot \ln \frac{w_Q + s_0}{w_Q - s_0}$ im Einklang mit dem P-

Abstand.

Da $\|\vec{t}_1\|^P \cdot \|\vec{t}_2\|^P \cdot \sin(\alpha)$ den P-Flächeninhalt eines Parallelogramms angibt, dient die zweite Komponente der Maß-Form der P-Flächenberechnung. Wenn in einem Punkt $Q(w_Q ; s_Q)$ des Poincare-Modells die orthogonalen Tangentenvektoren $(\Delta w; 0)$ und $(0; \Delta s)$ gegeben sind, die also ein Rechteck mit den kleinen Seitenlängen Δw und Δs aufspannen, dann ist der P-

Flächeninhalt davon ungefähr $\frac{1}{s_Q^2} \cdot (\Delta w \cdot \Delta s - 0 \cdot 0) = \frac{\Delta w \cdot \Delta s}{s_Q^2}$, wobei der Fehler für

Seitenlängen $\rightarrow 0$ verschwindet. Darum ergibt sich der P-Flächeninhalt einer Fläche F durch das

Integral $\iint_F \frac{1}{s^2} dsdw$. Wir wenden diese Formel auf die

Fläche zwischen Hochachse, der Parallelen dazu durch den Punkt $B(b ; \sqrt{s_0^2 - b^2})$, die oberhalb des

Halbkreises $[s_0 ; 0]^P$ liegt und folglich bis ins Unendliche reicht. Sie entspricht der in Abbildung 6 markierten Fläche auf der Pseudosphäre. Aus

$\int_0^b \int_{\sqrt{s_0^2 - w^2}}^{\infty} \frac{1}{s^2} dsdw = \int_0^b \frac{1}{\sqrt{s_0^2 - w^2}} dw = \arcsin \frac{b}{s_0}$ folgt,

dass der P-Flächeninhalt $\varphi = 90^\circ - \beta$ ist, wobei β der Innenwinkel der Fläche F bei B ist. Dieses Ergebnis entspricht dem bei der Pseudosphäre. Man erschließt daraus analog wie in Abschnitt 4, dass in einem Dreieit des Poincare-Modells der Flächeninhalt mit dem Innenwinkel-Defekt übereinstimmt.

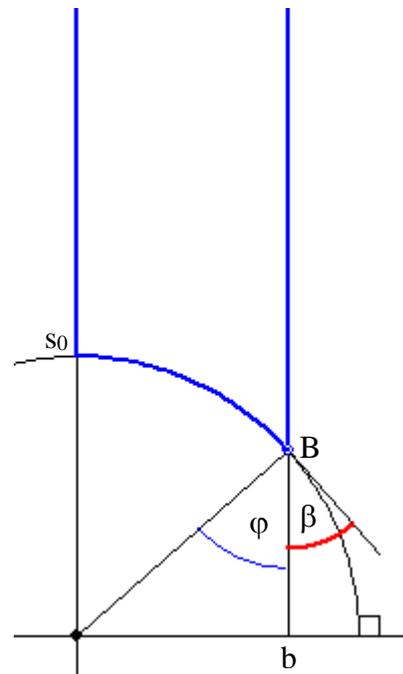


Abb. 18

14. Kongruenzabbildungen im Poincare-Modell

Definition : Eine Abbildung B der Punktmenge des Poincare-Modells auf sich wird ‚P-Kongruenzabbildung‘ genannt, wenn gilt:

- Die Menge der Punkte, die auf einer P-Geraden g liegen, wird auf die Punktmenge einer P-Geraden abgebildet; wir bezeichnen diese mit gB . (Erhaltung der Inzidenz)
- Für alle P-Geraden g, h die einen P-Punkt gemeinsam haben oder hyperbolisch parallel sind, ist $\sphericalangle(g, h) = \sphericalangle(gB, hB)$, oder es gilt $\sphericalangle(g, h) = \sphericalangle(hB, gB)$ für alle derartige P-Geraden. Im ersten Fall heißt die Kongruenzabbildung ‚gerade‘ im zweiten ‚ungerade‘. (Winkeltreue)
- Für alle P-Punkte Q, R mit $QB = Q'$ und $RB = R'$ ist $\|\overline{QR}\|^P = \|\overline{Q'R'}\|^P$. (Abstandstreue)

Da sich der Flächeninhalt eines P-Dreiecks durch den Innenwinkeldefekt berechnen lässt, ist jede P-Kongruenzabbildung auch flächentreu.

Wenn im Folgenden eine Gleichung $g = gB$ vorkommt, bedeutet dies nicht, dass jeder P-Punkt auf der P-Geraden g bei B festbleibt, sondern nur, dass für jeden P-Punkt Q auf g der Bildpunkt QB ebenfalls auf g liegt, aber möglicherweise an einer anderen Stelle.

Nach unserer Definition sind zwar alle euklidischen Verschiebungen parallel zur Rechtsachse Kongruenzabbildungen, nicht aber die parallel zur Hochachse, denn dabei ändern sich zwar nicht die Winkelgrößen, wohl aber die P-Abstände.

Satz 16 :

1. Für alle P-Geraden g ist σ_g eine ungerade P-Kongruenzabbildung.
2. Wenn P-Geraden g und h sich in Q senkrecht schneiden, dann ist die Hintereinanderschaltung von σ_g und σ_h gleich σ_Q .
3. Für alle Zahlen a, b mit $a > 0$ ist die Abbildung $\delta_{a,b}$ der P-Punktmenge auf sich, die einen P-Punkt $(w; s)^P$ in den P-Punkt $(a \cdot w + b; a \cdot s)^P$ abbildet, eine gerade P-Kongruenzabbildung.
4. Falls $a = 1$ ist $\delta_{a,b}$ die Hintereinanderschaltung der P-Spiegelungen an den Meridiangeraden $[0]^P$ und $[0, 5 \cdot b]^P$.
5. Falls $a > 0$ und $a \neq 1$ sei $w_0 = \frac{b}{1-a}$. Dann ergibt sich $\delta_{a,b}$ durch Hintereinanderschaltung der P-Spiegelungen an den Kreisgeraden $[w_0; 1]^P$ und $[w_0; \sqrt{a}]^P$.

Beweis : 1. Die Winkeltreue ergibt sich aus Satz 11 (6. Beh.) und die Abstandstreue aus Satz 14 (5. Beh.).

2. Sei $R \neq Q$ ein P-Punkt und K der P-Kreis um Q durch R . Da g und h diesen Kreis nach Satz 13 senkrecht schneiden, ist $K\sigma_g\sigma_h = K$. Für die P-Geraden j durch Q und R gilt für das Kreis-Winkelmaß $\sphericalangle(j\sigma_g\sigma_h; Q) = 2 \cdot \sphericalangle(h; Q) - \sphericalangle(j\sigma_g; Q) = 2 \cdot \sphericalangle(h; Q) - (2 \cdot \sphericalangle(g; Q) - \sphericalangle(j; Q)) =$

2. $\square(g, h; Q) + \square(j; Q) = 2 \cdot 0,5 \cdot \pi + \square(j; Q) = \square(j; Q)$. Darum ist $j\sigma_g\sigma_h = j$ und $R\sigma_g\sigma_h$ ein P-Punkt auf j mit dem gleichen P-Abstand von Q wie R . Wenn $R\sigma_g\sigma_h = R$ wäre, dann wäre $R\sigma_g = R\sigma_h$, folglich $g = h$. Darum ist $R\sigma_g\sigma_h = R\sigma_Q$.

3. $\delta_{a,b}$ ist eine euklidische Ähnlichkeits-Abbildung der oberen Halbebene auf sich und erhält darum die Inzidenz und die Winkelgrößen im Poincare-Modell. Dass auch die P-Abstände gleich bleiben ergibt sich aus der Gleichung

$$0,5 \cdot \ln \frac{a \cdot w + b - (a \cdot w_0 + b - a \cdot s_0)}{(a \cdot w_0 + b + a \cdot s_0) - (a \cdot w + b)} = 0,5 \cdot \ln \frac{w - (w_0 - s_0)}{(w_0 + s_0) - w}.$$

4. Die P-Spiegelungen an den Meridiangeraden $[0]^P$ und $[0,5 \cdot b]^P$ sind die Abbildungen

$$(w;s)^P \rightarrow (-w;s)^P \text{ und } (w;s)^P \rightarrow (b-w;s)^P \text{ Die Hintereinanderschaltung ist } (w;s)^P \rightarrow (b-(-w);s)^P = (w+b;s)^P.$$

5. Sei zunächst $b = 0$. Die P-Spiegelungen an den Kreisgeraden $[0; 1]^P$ und $[0; \sqrt{a}]^P$ sind die

Abbildungen $\sigma_1 : (w;s)^P \rightarrow \left(\frac{w}{w^2+s^2}; \frac{s}{w^2+s^2} \right)^P$ und $\sigma_a : (w;s)^P \rightarrow \left(\frac{a \cdot w}{w^2+s^2}; \frac{a \cdot s}{w^2+s^2} \right)^P$ Die Hintereinanderschaltung ist

$$(w;s)^P \rightarrow \left(\frac{a \cdot \frac{w}{w^2+s^2}}{\left(\frac{w}{w^2+s^2} \right)^2 + \left(\frac{s}{w^2+s^2} \right)^2}; \frac{a \cdot \frac{s}{w^2+s^2}}{\left(\frac{w}{w^2+s^2} \right)^2 + \left(\frac{s}{w^2+s^2} \right)^2} \right)^P = (a \cdot w; a \cdot s)^P.$$

Für $b > 0$ benutzen wir die Verschiebung $\tau = \delta_{1,b}$ mit der Umkehr-Abbildung $\tau^{-1} = \delta_{1,-b}$.

Dann ist die Hintereinanderschaltung $(\tau^{-1}\sigma_1\tau)(\tau^{-1}\sigma_a\tau) = \tau^{-1}\sigma_1\sigma_a\tau = \delta_{a,b}$ Und $\tau^{-1}\sigma_1\tau$ bzw.

$\tau^{-1}\sigma_a\tau$ ist die P-Spiegelung an $[0; 1]^P$ bzw. $[0; \sqrt{a}]^P$. □

Satz 17 :

1. Wenn g, h P-Geraden sind und Q bzw. R P-Punkte auf g bzw. h , dann gibt es genau vier P-Kongruenzabbildungen B mit $QB = R$ und $gB = h$. Wenn B eine dieser Kongruenzabbildungen ist, dann sind die anderen drei die Hintereinanderschaltungen $B\sigma_R, B\sigma_h$ und $B\sigma_R\sigma_h$.
2. Wenn ein P-Punkt R auf einer P-Geraden h liegt, dann ist $\sigma_R\sigma_h$ die Spiegelung an der P-Geraden m durch R , die orthogonal zu h ist, folglich auch $\sigma_R = \sigma_h\sigma_m$.
3. g, h und j seien drei P-Geraden mit einem gemeinsamen P-Punkt, einer gemeinsamen P-Orthogonalen oder sie seien hyperbolisch parallel mit dem gleichen Ende. Dann gibt es eine P-Gerade k mit $\sigma_g\sigma_h\sigma_j = \sigma_k$.
4. Wenn die P-Kongruenzabbildung den Punkt Q festlässt, dann ist B P-Spiegelung an einer Geraden durch Q oder die Hintereinanderschaltung von zwei derartigen P-Geraden.
5. Für jeden P-Punkt Q und jede P-Kongruenzabbildung B gilt: Wenn B gerade ist, gibt es eine P-Gerade g durch Q und eine weitere P-Gerade h mit $B = \sigma_g\sigma_h$; andernfalls gibt es eine P-Gerade g durch Q und einen P-Punkt R mit $B = \sigma_h\sigma_R$.

Beweis : 1. Es seien g, h P-Geraden und Q, R Punkte auf g bzw. h . Es gibt Zahlen a, b mit $a > 0$, so dass für die Abbildung $\delta_{a,b}$ aus Satz 16 gilt: $Q\delta_{a,b} = R$. Sei $j = g\delta_{a,b}$. Dann gibt es nach Satz 12 eine P-Gerade k durch R mit $h = j\sigma_k$. Für die P-Kongruenzabbildung $B := \delta_{a,b}\sigma_k$ gilt darum $QB = R$ und $gB = h$.

Wenn $C \neq B$ eine andere Kongruenzabbildung mit $QC = R$ und $gC = h$ ist, dann lässt die Hintereinanderschaltung $B^{-1}C$ den P-Punkt R und die P-Gerade h fest. Sei $S \neq R$ ein Punkt auf h . Wenn $B^{-1}C$ diesen Punkt festlässt, dann werden wegen der Abstandstreue von $B^{-1}C$ alle Punkte von h festgelassen und wegen der Winkeltreue alle zu h senkrechte P-Geraden. Dann ist wieder wegen der Abstandstreue $B^{-1}C = \sigma_h$. Wenn $B^{-1}C$ den Punkt S nicht festlässt, muss der Bildpunkt der Punkt S' auf h sein, der den gleichen Abstand von R hat wie S . Für die zu h in R senkrechte P-Gerade m ist dann S Fixpunkt von $B^{-1}C\sigma_m = B^{-1}C\sigma_R\sigma_h$, also $B^{-1}C\sigma_R\sigma_h$ entweder die identische Abbildung id oder σ_h . Aus $B^{-1}C\sigma_R\sigma_h = id$ folgt $C\sigma_R\sigma_h = BB^{-1}C\sigma_R\sigma_h = B$, und aus $B^{-1}C\sigma_R\sigma_h = \sigma_h$ ergibt sich $B = C\sigma_R$.

2. R sei P-Punkt der P-Geraden h und m das P-Lot durch R auf h . S sei ein beliebiger von R verschiedener P-Punkt und n die P-Verbindungsgerade von R und S . Aus

$$\square(n\sigma_h\sigma_m; Q) = 2 \cdot \square(m; Q) - \square(n\sigma_h; Q) = 2 \cdot \square(m; Q) - (2 \cdot \square(h; Q) - \square(n; Q)) =$$

$2 \cdot \square(h, m; Q) + \square(n; Q) = \square(n; Q)$ folgt $n\sigma_h\sigma_m = n$. $S\sigma_h\sigma_m$ ist darum ein Punkt auf n , der von R den gleichen Abstand hat wie S . $S\sigma_h\sigma_m$ kann nicht gleich S sein, da sonst $S\sigma_h = S\sigma_m$ wäre. Folglich ist $S\sigma_h\sigma_m = S\sigma_R$.

3. R sei ein gemeinsamer P-Punkt von g, h und j . Nach Satz 12 gibt es eine P-Gerade k durch R mit $g\sigma_g\sigma_h\sigma_j = g\sigma_k$. Nach der 1. Behauptung ist deshalb $\sigma_g\sigma_h\sigma_j = \sigma_k$ oder $\sigma_g\sigma_h\sigma_j = \sigma_k\sigma_R$, denn die anderen beiden Möglichkeiten scheiden aus, weil keine ungerade Kongruenzabbildung gerade sein kann. Nach der 2. Behauptung ist $\sigma_k\sigma_R = \sigma_m$ für das P-Lot m von R auf k .

Wenn g, h und j hyperbolisch parallel mit dem Ende R sind, dann gibt es nach Satz 12 ebenfalls eine P-Gerade k durch R mit $g\sigma_g\sigma_h\sigma_j = g\sigma_k$ und es ist $g\sigma_g\sigma_h\sigma_j\sigma_k = g$. Sei S ein beliebiger P-Punkt und L der Fußpunkt des P-Lots von S auf g . Der Kreis durch L , der die Rechtsachse in R berührt, steht senkrecht auf g, h, j und k und bleibt darum bei $\sigma_g\sigma_h\sigma_j\sigma_k$ fest. Folglich gilt auch $L\sigma_g\sigma_h\sigma_j\sigma_k = L$. $S\sigma_g\sigma_h\sigma_j\sigma_k$ hat von L den gleichen P-Abstand wie S , kann aber nicht $S\sigma_g$ sein, da $\sigma_g\sigma_h\sigma_j\sigma_k$ eine gerade Kongruenzabbildung ist. Folglich ist $S\sigma_g\sigma_h\sigma_j\sigma_k = S$ für alle P-Punkte und $\sigma_g\sigma_h\sigma_j = \sigma_k$.

g, h und j seinen nun P-Geraden mit einer gemeinsamen P-Orthogonalen m . Wieder nach Satz 12 gibt es eine P-Gerade k senkrecht zu m mit $g\sigma_g\sigma_h\sigma_j\sigma_k = g$. Wegen $m\sigma_g\sigma_h\sigma_j\sigma_k = m$ gilt, dann auch $L\sigma_g\sigma_h\sigma_j\sigma_k = L$ für den Schnittpunkt L von g und m . Darum ist auch in diesem Fall $\sigma_g\sigma_h\sigma_j = \sigma_k$.

4. Es gelte $QB = Q$. g sei eine P-Gerade durch Q . Dann liegt Q auch auf gB . Es gibt nach Satz 12 eine P-Gerade k durch Q mit $gB\sigma_k = g$. Nach 1. ist dann $B\sigma_k$ die identische Abbildung oder gleich σ_g oder $\sigma_g\sigma_Q$ oder σ_Q . In jedem Fall ist B die Hintereinanderschaltung von P-Spiegelungen an P-Geraden durch Q . Mit 3. folgt daraus die Behauptung 4.

5. Sei $R := QB$ und h die P-Mittelsenkrechte von Q und R . Dann gilt $QB\sigma_h = Q$. Nach 4. ist $B\sigma_h$ darum P-Spiegelung an einer P-Geraden g durch Q oder die Hintereinanderschaltung $\sigma_j\sigma_k$ von zwei derartigen P-Spiegelungen. Im ersten Fall folgt $B = \sigma_g\sigma_h$. Im zweiten Fall sei m

das P-Lot von Q auf h. Nach 3. ist dann $\sigma_j\sigma_k\sigma_m$ eine P-Spiegelung σ_n mit einer P-Geraden n durch Q. S sei der P-Schnittpunkt von m und h. Dann folgt

$$B = \sigma_j\sigma_k\sigma_h = \sigma_j\sigma_k\sigma_m\sigma_m\sigma_h = \sigma_n\sigma_s. \quad \square$$

Anders als in der euklidischen Geometrie ist in der hyperbolischen Geometrie der Begriff 'Ähnlichkeitsabbildung' keine Verallgemeinerung der Begriffs 'Kongruenzabbildung'. Denn wenn EFG und E'F'G' zwei Dreiecke mit gleichen Innenwinkeln sind, dann kann man E'F'G' durch eine Kongruenzabbildung B so abbilden, dass E'B auf E fällt und F'B bzw. G'B auf der Geraden EF bzw. EG liegt. Da aber der Winkeldefekt $180^\circ - \alpha - \beta - \gamma$ für beide Dreiecke gleich ist, muss auch der P-Flächeninhalt gleich sein. Dann fällt aber F'B auf F und G' auf G, so dass die Dreiecke EFG und E'F'G' nicht nur ähnlich, sondern sogar kongruent sind.

Zum Abschluss dieser Abschnitte über das Poincare-Modell konstatieren wir noch einmal den Zusammenhang mit der Pseudosphäre.

Satz 18 : Ω sei die Abbildung von der Punktmenge der zur Pseudosphäre gehörenden Riemann-Fläche auf die Menge der P-Punkte $(w ; s)^P$ mit $s \geq 1$ des Poincare-Modells, die den

Punkt mit den Polarkoordinaten $(r ; w)$ auf den P-Punkt $\left(w ; \frac{1}{r}\right)^P$ abbildet. Dann hat Ω

folgende Eigenschaften:

1. $(r ; w)$ liegt genau dann auf der Geodäte $[r_0 ; w_0]$ bzw. $[w_0]$, wenn $\Omega((r ; w))$ Punkt der P-Geraden $\left[w_0 ; \frac{1}{r_0}\right]^P$ bzw. $[w_0]^P$ ist. Diese Gerade sei mit $\Omega([r_0 ; w_0])$ bzw. $\Omega([w_0])$ bezeichnet.
2. Wenn sich die Geodäten auf der Pseudosphäre schneiden, dann haben auch ihre Ω -Bilder einen gemeinsamen Punkt und die Größe des Schnittwinkels unterscheidet sich bei den Geodäten und bei den P-Geraden nur im Vorzeichen.
3. Die Weglänge zwischen den Punkten $(r_1 ; w_1)$ und $(r_2 ; w_2)$ auf einer Geodäte stimmt mit dem P-Abstand von $\Omega((r_1 ; w_1))$ und $\Omega((r_2 ; w_2))$ überein.

Beweis : 1. folgt aus Satz 8 und Satz 13.

2. Dass sich die Geodäten $[r_1 ; w_1]$ und $[r_2 ; w_2]$ schneiden, wenn sich die Bilder schneiden, folgt ebenfalls aus Satz 8 und Satz 13. Der Schnittwinkel ist auf der Riemann-Fläche der Pseudosphäre durch die Maß-Form

$$\mu_P((r'_1 ; w'_1); (r'_2 ; w'_2)) = \left(\frac{r'_1 \cdot r'_2}{r_0^2} + r_0^2 \cdot w'_1 \cdot w'_2 ; r'_1 \cdot w'_2 - r'_2 \cdot w'_1 \right)$$

bestimmt. Dabei geben $(r'_1 ; w'_1)$ und $(r'_2 ; w'_2)$ die Polar-Koordinaten eines Tangentenvektors in einem Punkt $P(r_0 ; w_0)$ an.

Es sei $(r(t) ; w(t))$ eine Kurve durch diesen Punkt, dessen Bild bei Ω der P-Punkt Q sei. Der Tangentenvektor im Urbildpunkt $(r_0 ; w_0)$ ist $(r'(t_0) ; w'(t_0))$. Die Bildkurve bei Ω ist dann

durch $\left(w(t) ; \frac{1}{r(t)}\right)$ gegeben mit $Q = \left(w(t_0) ; \frac{1}{r(t_0)}\right)$ und dem Tangentenvektor

$$\left(w'(t_0) ; -\frac{r'(t_0)}{(r(t_0))^2}\right) = (w' ; -s_Q^2 \cdot r').$$

Die Einsetzung in die Maß-Form des Poincare-Modells ergibt

$$\mu_Q^P((w'_1; s'_1); (w'_2; s'_2)) = \left(\frac{1}{s_Q^2} \cdot (w'_1 \cdot w'_2 + s_Q^4 \cdot r'_1 \cdot r'_2); \frac{1}{s_Q^2} \cdot (w'_1 \cdot s_Q^2 \cdot r'_2 - w'_2 \cdot s_Q^2 \cdot r'_1) \right) = \left(r_0^2 \cdot w'_1 \cdot w'_2 + \frac{r'_1 \cdot r'_2}{r_0^2}; -w'_1 \cdot r'_2 + w'_2 \cdot r'_1 \right).$$

bei den Geodäten und bei den P-Geraden nur im Vorzeichen.

Wenn eine Geodäte ein Meridian ist, schließt man analog.

3. Nach Satz 8 beträgt die Weglänge zwischen den Punkten $(r_0; w_0)$ und $(r; w)$ auf der

Geodäte $[r_0; w_0]$ der Riemann-Fläche $0,5 \cdot \left| \ln \frac{\frac{1}{r_0} + (w - w_0)}{\frac{1}{r_0} - (w - w_0)} \right|$, und die zwischen $(r_0; w_0)$ und

$(r; w_0)$ auf $[w_0]$ ist $\left| \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right|$. Die Abstände zwischen den Bildpunkten $(w_0; s_0)^P$ und $(w; s)^P$ auf

der Kreisgeraden $[w_0; s_0]^P$ bzw. der Meridiangeraden ist gleich groß, nämlich

$$0,5 \cdot \left| \ln \frac{s_0 + (w - w_0)}{s_0 - (w - w_0)} \right| \text{ bzw. } \left| \ln \left(\frac{s_0}{s} \right) \right|.$$

□

15. Das Halbkugel-Modell

Abbildung 19 zeigt den Übergang vom Poincare-Modell zum Beltrami-Klein-Modell. Dem Bild liegt ein dreidimensionales Koordinatensystem zugrunde, dessen Ursprung im Mittelpunkt der zur Halbkugel gehörigen Kugel liegt. Der weiß gefüllte Punkt Z hat die Koordinaten $(-1; 0; 0)$ und der gelb gezeichnete Meridian liegt in der x-z-Ebene. Die Halbebene des Poincare-Modells liegt in der Tangentialebene der Halbkugelfläche mit dem Berührungspunkt $(1; 0; 0)$. In ihr sind Halbkreise eingezeichnet, die in der perspektivischen Verzerrung als Ellipsen-Hälften erscheinen. Sie sind die Kreisgeraden eines P-Dreiseits mit drei Eckpunkten A, B und C. Diese Eckpunkte werden durch eine stereographische Projektion mit dem Zentrum Z auf die Halbkugelfläche abgebildet. Die Bilder seien mit A', B' und C' bezeichnet. A, A' und Z sind also kollinear, ebenso G, G' und Z sowie C, C', und Z. Die Punkte A', B' und C' werden durch die Projektion parallel zur z-Achse senkrecht auf die Schatten-Punkte A'', B'' und C'' in der x-y-Ebene projiziert. Während die Bilder der Kreisgeraden des Poincare-Modells bei der stereographischen Projektion Halbkreise auf der Halbkugelfläche sind, die senkrecht auf der x-y-Ebene enden, sind die Parallelprojektions-Bilder davon Sehnen des Randkreises der Halbkugelfläche. Das Innere dieses Kreises ist im Bild oben links angegeben. Es stellt die Punktmenge des Beltrami-Klein-Modells dar, das im Abschnitt 20 behandelt wird.

Die Halbkugel mit den Halbkreisen senkrecht zur x-y-Ebene als ‚Geraden‘ ergibt ein Modell der hyperbolischen Geometrie, das Vorzüge des Poincare-Modells und des Beltrami-Klein-Modells verbindet, allerdings als räumliches Modell für zeichnerische Konstruktionen schwer zugänglich ist. Es benutzt wie das Poincare-Modell eine euklidische Winkelmessung und nutzt wie das Beltrami-Klein-Modell lineare Strukturen. Hyperbolische Kreise sind wie im Poincare-Modell euklidische Kreise und die für das Beltrami-Klein-Modell wichtige Pol-Polaren-Beziehung erhält durch den Bezug auf eine Kugel einen zusätzlichen Sinn. Beim Halbkugel-Modell benutzen wir das Präfix H-

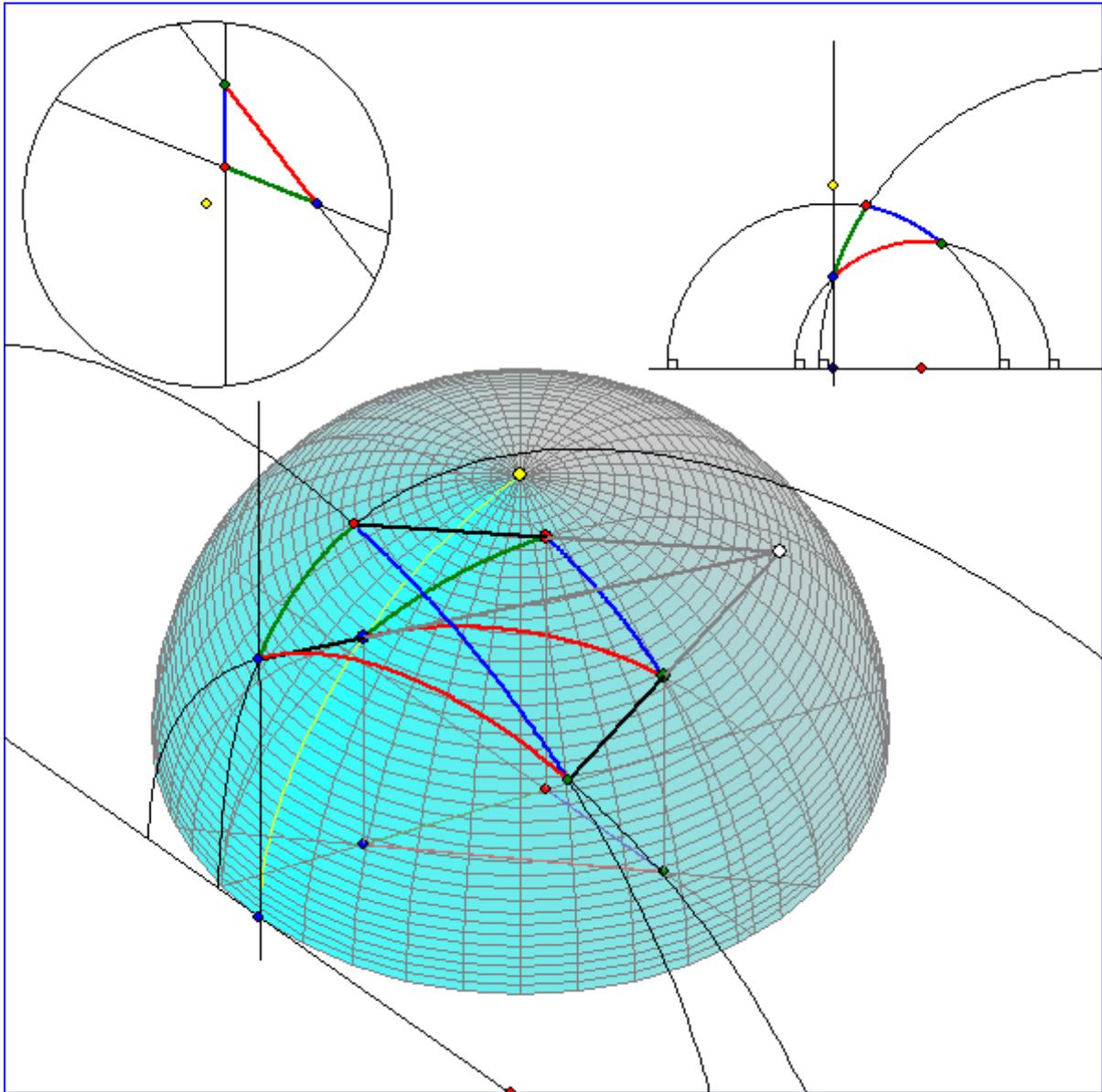


Abb. 19

Die Abbildung 20 zeigt ein Dreieck mit Eckpunkten **A**, **B** und **C** im Halbkugel-Modell zusammen mit den H-Mittelsenkrechten und dem H-Umkreis. Oben rechts ist das entsprechende Bild im Poincare-Modell angegeben und oben links das Bild in der x-y-Ebene, welches das Dreieck im Beltrami-Klein-Modell wiedergibt. Der H-Umkreis ist ein euklidischer Kreis auf der Halbkugel und liegt in einer Ebene, deren Schnittgerade mit der x-y-Ebene als Verbindungsgerade g der Schnittpunkte von AB und $A'B'$ sowie AC und $A'C'$ eingezeichnet ist. Die Ebene durch g und den gemeinsamen Punkt M der drei H-Mittelsenkrechten berührt die Halbkugel in M . g ist die Polare des Schattenpunktes M' von M . Wie beim Poincare-Modell ist auch hier das H-Zentrum M des Umkreises von ABC verschieden von dessen euklidischem Zentrum.

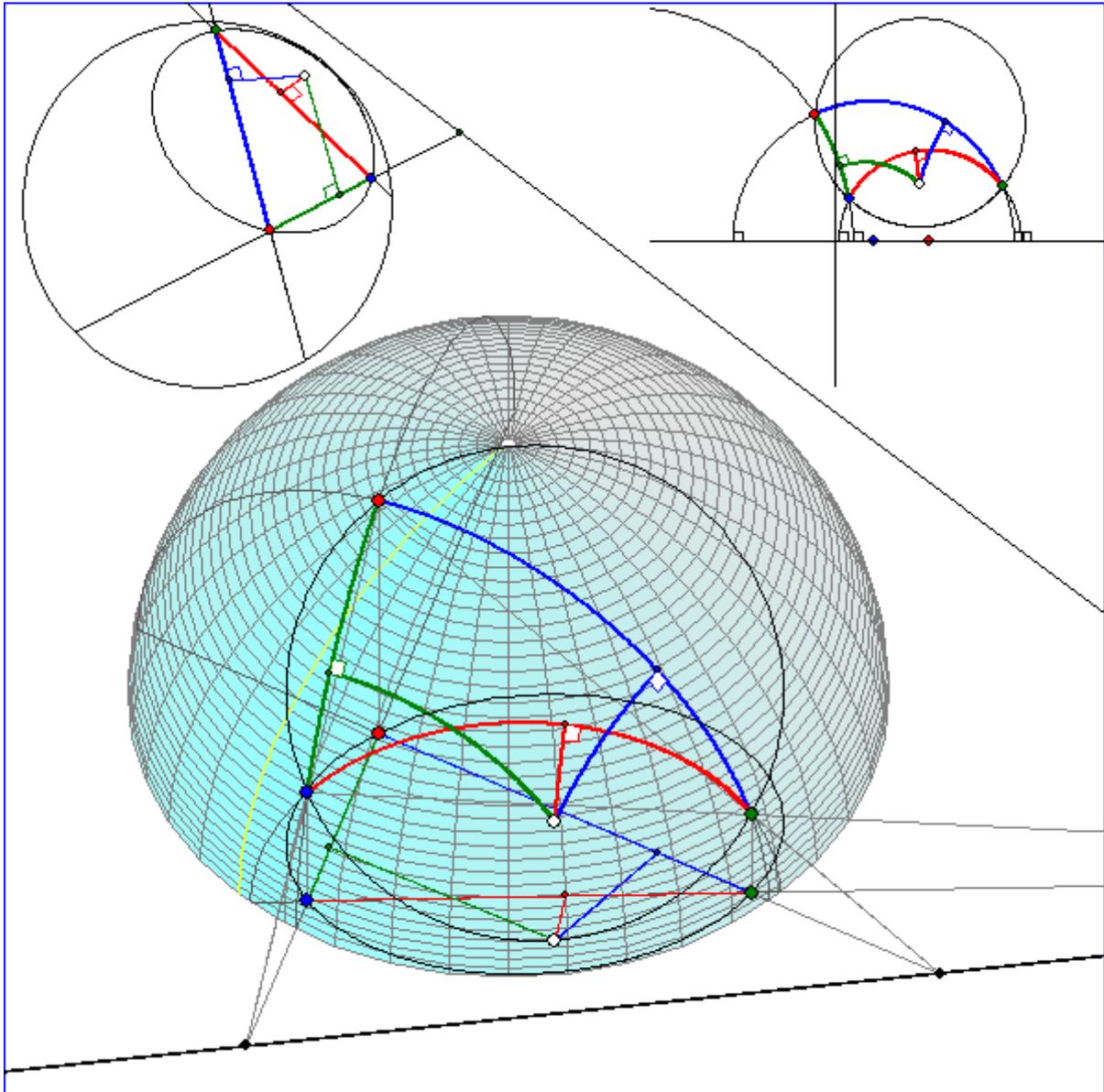


Abb. 20

Definition :

- Die Menge der ‚Punkte‘ P^H des Halbkugel-Modells ist die Menge der Punkte der Halbkugel­fläche $\{(x; y; \sqrt{1-x^2-y^2}) \mid x, y \in \mathbf{R} \text{ und } x^2 + y^2 < 1\}$. Der Rand der Halbkugel­fläche gehört also nicht zu P^H . Unter der ‚Höhe‘ von $Q(x; y; \sqrt{1-x^2-y^2})$ verstehen wir den z-Wert $\sqrt{1-x^2-y^2}$. Zur Darstellung von Q mit kartesischen Koordinaten benutzen wir nicht nur das Tripel $(x; y; \sqrt{1-x^2-y^2})$, sondern auch in Anlehnung an die projektive Geometrie die Bezeichnung $(x; y; 1)^H$, wobei wir $(x; y; 1)^H$ mit $(t \cdot x; t \cdot y; t)^H$ identifizieren, falls $t \neq 0$ ist. Hierbei muss also das Tripel $(x; y; 1)^H$ mit hochgestelltem H, zu dessen Punkt die Höhe $\sqrt{1-x^2-y^2}$ gehört, von dem Tripel $(x; y; 1)$ mit z-Wert 1 ohne hochgestelltes H unterschieden werden.

- Die Menge der ‚Geraden‘ G^H des Halbkugel-Modells ist die Menge der Schnittkreise von Ebenen parallel zur z-Achse mit der Halbkugelfläche. Der Abstand dieser Schnittebenen von der z-Achse ist kleiner als 1. Der ‚Schatten‘ einer ‚Geraden‘ g bei Projektion auf die x-y-Ebene parallel zur z-Achse ist dann eine Sehne (ohne die Endpunkte) des Randkreises der Halbkugelfläche. Der Punkt des Schnittkreises mit der größten Höhe sei Scheitelpunkt der ‚Geraden‘ g genannt. Die Höhe der ‚Geraden‘ g sei die Höhe ihres Scheitelpunkts. Die Höhe ist die halbe Länge des Schattens der ‚Geraden‘. Als Ende von g bezeichnen wir die gemeinsamen Punkte ihrer Schnittebene mit dem Rand der Halbkugelfläche. Die Gleichung $a \cdot x + b \cdot y + d = 0$ im \mathbf{R}^2 von der Schatten-Geraden der ‚Geraden‘ g stimmt mit der Gleichung der Schnittebene von g im \mathbf{R}^3 überein. Wir verwenden für g die Bezeichnung $[a ; b ; d]^H$. Dabei ist $[t \cdot a ; t \cdot b ; t \cdot d]^H$ die gleiche orientierte H-Gerade falls $t > 0$ ist. Die Orientierung wird dann durch die Richtung des Vektors (a;b) festgelegt. Und zwar sei $Q > R$ auf der ‚Geraden‘ g, wenn für die Schattenpunkte Q' und R' gilt: Wenn $\overline{Q'R'}$ der Verbindungsvektor von Q' und R' ist, dann dreht man $\overline{Q'R'}$ links herum um 90° in die Richtung des Vektors (a ; b).
- Die Größe des Winkels zwischen zwei ‚Geraden‘ g und h, die einem ‚Punkt‘ Q gemeinsam haben, ist die euklidischen Größe $\angle(g;h;Q)$ des Schnittwinkels, die wir auch mit $\square(g;h)$ bezeichnen, da g und h nicht mehr als einen Schnittpunkt haben können. Dabei identifizieren wir α nicht mit $\alpha + 180^\circ$ und $\alpha - 180^\circ$, rechnen also ‚modulo 2π ‘. Wenn sich zwei ‚Geraden‘ g, h berühren, definieren wir $\square(g;h) = 0^\circ$ und nennen g und h ‚hyperbolisch parallel‘. Der Berührungspunkt liegt dann auf dem Randkreis der Halbkugelfläche und gehört nicht zur Menge der ‚Punkte‘.
- g sei eine orientierte ‚Gerade‘ mit den Enden E_1 und E_2 , wobei auf Grund der Orientierung $E_1 < E_2$ sei. Q sei ein ‚Punkt‘ auf g mit dem Schattenpunkt Q' in der x-y-Ebene. Der euklidische Abstand des Punktes Q' von E_1 bzw. E_2 sei mit $|E_1Q'|$ bzw. $|Q'E_2|$ bezeichnet. Unter dem signierten H-Abstand des ‚Punktes‘ Q vom Scheitelpunkt der ‚Geraden‘ g verstehen wir dann die Zahl $0,5 \cdot \ln \frac{|E_1Q'|}{|Q'E_2|}$. Andere signierte H-Abstände ergeben sich durch Differenz-Bildung. Dann ist der signierte H-Abstand zweier Punkte Q und R die Hälfte von Logarithmus eines Doppelverhältnisses. Nicht signierte H-Abstände ergeben sich durch Betrags-Bildung. Wir bezeichnen den so definierten (nicht-signierten) H-Abstand zwischen ‚Punkten‘ Q und R mit $\|\overline{QP}\|^H$.

Diese ‚Punkte‘ und ‚Geraden‘ nennen wir H-Punkte und H-Geraden.

Es soll zunächst der Zusammenhang zwischen Kreisen in der Ebene und Kreisen auf der Kugeloberfläche untersucht werden.

Definition : g sei eine Gerade im \mathbf{R}^3 . Unter dem Kugel-Kreisbüschel zu g (kurz: g-Kugel-Kreisbüschel) verstehen wir die Menge der Schnittkreise von Ebenen durch g mit der Kugelfläche mit dem Zentrum (0 ; 0 ; 0) und dem Radius 1 (Einheitskugel). Das Kugel-Kreisbüschel zu g heißt elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch, je nachdem die Anzahl der Schnittpunkte von g mit der Einheitskugelfläche 2, 1 oder 0 ist. Wir bezeichnen g als ‚Achse‘ des g-Kugel-Kreisbüschels. Die Menge der Schnittkreise von Ebenen, die zu einer Ebene E

parallel sind, bezeichnen wir als E-Kugel-Kreisbündel. Es ist ein hyperbolisches Kreisbündel.

(Wenn man den affinen Raum durch unendlich ferne Punkte zu einem projektiven Raum erweitert, dann bezeichnet man das E-Kugel-Kreisbündel besser als g-Kugel-Kreisbündel, wobei g die unendlich ferne Gerade auf der projektiven Erweiterung von E ist.)

Wie auch in der projektiven Geometrie spielt in der Geometrie des Halbkugel-Modells und des Beltrami-Klein-Modells das Kreuzprodukt zweier Tripel

$(a_1; b_1; c_1) \times (a_2; b_2; c_2) = (b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1; c_1 \cdot a_2 - c_2 \cdot a_1; a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)$ eine Rolle, um

Verbindungsgeraden und Schnittpunkte zu berechnen. Der Vektor $(a_1; b_1; c_1) \times (a_2; b_2; c_2)$ ist euklidisch orthogonal zu $(a_1; b_1; c_1)$ und $(a_2; b_2; c_2)$. Wir benutzen im Folgenden auch das

Skalarprodukt $(a_1; b_1; c_1) \cdot (a_2; b_2; c_2) := a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2$.

Hilfssatz 3: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ und \vec{v}_4 seien Tripel reeller Zahlen. Dann gilt

1. die Lagrange-Identität $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot (\vec{v}_3 \times \vec{v}_4) = (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3) \cdot (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_4) - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_4) \cdot (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3)$ und
2. die Grassmann-Identität $\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) = \vec{v}_2 \cdot (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3) - \vec{v}_3 \cdot (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)$

Man zeigt dies, indem man z. B. für \vec{v}_1, \vec{v}_2 und $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ die Tripel $(a_1; b_1; c_1), (a_2; b_2; c_2)$ und $(b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1; c_1 \cdot a_2 - c_2 \cdot a_1; a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)$ einsetzt und ausmultipliziert.

Satz 19:

1. E_1 und E_2 seien Ebenen durch den Punkt S auf der Einheitskugelfläche mit dem Zentrum im Ursprung. \vec{s} sei der Ortsvektor von S und \vec{n}_1, \vec{n}_2 Normalenvektoren von E_1 bzw. E_2 mit der Länge 1. Der Winkel zwischen den Schnittkreisen K_1 und K_2 der Ebenen mit der Kugelfläche habe die Größe α . Dann ist

$$|\cos(\alpha)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 - (\vec{n}_1 \cdot \vec{s}) \cdot (\vec{n}_2 \cdot \vec{s})|}{\sqrt{1 - (\vec{n}_1 \cdot \vec{s})^2} \cdot \sqrt{1 - (\vec{n}_2 \cdot \vec{s})^2}}. \text{ Wenn } E_2 \text{ insbesondere durch den Punkt mit dem}$$

Ortsvektor $\frac{\vec{n}_1}{\vec{n}_1 \cdot \vec{s}}$ geht, sind K_1 und K_2 orthogonal.

2. Q und R seien verschiedene Punkte auf der Einheitskugelfläche. E_Q und E_R seien die Tangentialebenen zu den Berührungspunkten Q und R. E_1 sei eine Ebene durch Q und R mit dem Schnittkreis K_1 . Wenn E_Q und E_R parallel sind, sei E_2 eine dazu parallele Ebene, welche die Einheitskugelfläche schneidet. Andernfalls sei E_2 eine schneidende Ebene durch die Schnittgerade von E_Q und E_R . Dann schneiden sich die Schnittkreise K_1 und K_2 orthogonal.

Beweis: 1. Die Vektoren $\vec{n}_1 \times \vec{s}$ und $\vec{n}_2 \times \vec{s}$ sind Tangensvektoren zu K_1 und K_2 in S.

Wegen $\vec{s} \cdot \vec{s} = 1$ ist nach der Lagrange-Identität

$$\pm |\vec{n}_1 \times \vec{s}| |\vec{n}_2 \times \vec{s}| \cos(\alpha) = (\vec{n}_1 \times \vec{s}) \cdot (\vec{n}_2 \times \vec{s}) = (\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) (\vec{s} \cdot \vec{s}) - (\vec{n}_1 \cdot \vec{s}) (\vec{n}_2 \cdot \vec{s}) = \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 - (\vec{n}_1 \cdot \vec{s}) (\vec{n}_2 \cdot \vec{s})$$

$$\text{und } |\vec{n}_1 \times \vec{s}|^2 = (\vec{n}_1 \times \vec{s}) \cdot (\vec{n}_1 \times \vec{s}) = \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_1 - (\vec{n}_1 \cdot \vec{s}) (\vec{n}_1 \cdot \vec{s}) = 1 - (\vec{n}_1 \cdot \vec{s})^2.$$

Wenn E_2 durch den Punkt mit dem Ortsvektor $\frac{\vec{n}_1}{\vec{n}_1 \cdot \vec{s}}$ geht, dann ist $\vec{n}_2 \cdot \frac{\vec{n}_1}{\vec{n}_1 \cdot \vec{s}} = \vec{n}_2 \cdot \vec{s}$. Daraus folgt die erste Behauptung.

2. \vec{q} , \vec{r} seien Ortsvektoren von Q bzw. R. Es sind $\vec{q} \cdot \vec{x} - 1 = 0$ und $\vec{r} \cdot \vec{x} - 1 = 0$ Gleichungen von E_Q und E_R . Es gibt ein $\lambda \in \mathbf{R}$, so dass $\lambda \cdot (\vec{q} \cdot \vec{x} - 1) + (1 - \lambda) \cdot (\vec{r} \cdot \vec{x} - 1) = 0$ Gleichung von E_2 ist. Dies ist äquivalent mit $(\lambda \cdot \vec{q} + (1 - \lambda) \cdot \vec{r}) \cdot \vec{x} = 1$. Darum ist $\vec{n}_2^* := \lambda \cdot \vec{q} + (1 - \lambda) \cdot \vec{r}$ Normalenvektor von E_2 .

E_1 und E_2 schneiden sich in einem Punkt S mit dem Ortsvektor \vec{s} . Darum ist $\vec{n}_2^* \cdot \vec{s} = (\lambda \cdot \vec{q} + (1 - \lambda) \cdot \vec{r}) \cdot \vec{s} = 1$. Für einen Normalenvektor \vec{n}_1^* von E_1 gilt $\vec{n}_1^* \cdot \vec{s} = \vec{n}_1^* \cdot \vec{q} = \vec{n}_1^* \cdot \vec{r}$, folglich $\vec{n}_1^* \cdot \vec{n}_2^* = \lambda \cdot (\vec{n}_1^* \cdot \vec{q}) + (1 - \lambda) \cdot (\vec{n}_1^* \cdot \vec{r}) = \vec{n}_1^* \cdot \vec{s} = (\vec{n}_1^* \cdot \vec{s})(\vec{n}_2^* \cdot \vec{s})$. Nach der 1. Behauptung sind also K_1 und K_2 orthogonal, denn aus $\vec{n}_1^* \cdot \vec{n}_2^* - (\vec{n}_1^* \cdot \vec{s})(\vec{n}_2^* \cdot \vec{s}) = 0$, folgt

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 - (\vec{n}_1 \cdot \vec{s})(\vec{n}_2 \cdot \vec{s}) = 0 \text{ auch für die normierten Vektoren } \vec{n}_i = \frac{\vec{n}_i^*}{|\vec{n}_i^*|}. \quad \square$$

Bemerkung : Der Punkt mit dem Ortsvektor $\frac{\vec{n}_1}{\vec{n}_1 \cdot \vec{s}}$ in der 1. Behauptung wird auch als Pol von E_1 bezüglich der Einheitskugelfläche bezeichnet.

16. Stereographische Projektion

Bei der stereographischen Projektion wird ein Punkt $Q(1; y; z)$ der Ebene E (hier $x = 1$) in einen Bildpunkt Q' auf der Einheitskugel-Fläche abgebildet, wobei die Verbindungsgerade durch einen festen Punkt Z verläuft (hier $(-1; 0; 0)$). Bei der Beschreibung der Eigenschaften dieser Projektion im folgenden Satz benutzen wir die Spiegelung an einer Ursprungsgeraden mit dem Richtungsvektor $w = (wx; wy; wz)$, die mit $\lambda = \frac{1}{wx^2 + wy^2 + wz^2}$ durch die Matrix

$$S_w := \begin{pmatrix} -1 + 2 \cdot \lambda \cdot wx^2 & 2 \cdot \lambda \cdot wx \cdot wy & 2 \cdot \lambda \cdot wx \cdot wz \\ 2 \cdot \lambda \cdot wx \cdot wy & -1 + 2 \cdot \lambda \cdot wy^2 & 2 \cdot \lambda \cdot wy \cdot wz \\ 2 \cdot \lambda \cdot wx \cdot wz & 2 \cdot \lambda \cdot wy \cdot wz & -1 + 2 \cdot \lambda \cdot wz^2 \end{pmatrix} \text{ beschrieben wird.}$$

Dabei ist der Achsen-Vektor w der Verbindungsvektor $(2; y; z)$ von Z mit Q . Durch die Spiegelung werden dann die Ortsvektoren von Q' und des Punktes $(1; 0; 0)$ vertauscht.

Satz 20 : Z sei der Punkt $(-1; 0; 0)$ im \mathbf{R}^3 und Σ die Abbildung von der Ebene $E: x = 1$ auf die Menge der Punkte ungleich Z in der Kugelfläche um den Ursprung $(0; 0; 0)$ mit dem Radius 1, die einem Punkt $Q(1; y; z)$ in E den Schnittpunkt der Geraden QZ mit der Kugelfläche zuordnet. Dann gilt:

1. Mit $\lambda := \frac{1}{4 + y^2 + z^2}$ ist $Q' = \Sigma((1; y; z)) = (-1 + 8 \cdot \lambda; 4 \cdot \lambda \cdot y; 4 \cdot \lambda \cdot z)$ für alle $y, z \in \mathbf{R}$.

Σ ist umkehrbar und es gilt $\Sigma^{-1}((x; y; z)) = \left(1; \frac{2 \cdot y}{1+x}; \frac{2 \cdot z}{1+x}\right)$ für alle $x, y, z \in \mathbf{R}$ mit $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und $x \neq -1$.

2. K sei der Kreis in E mit dem Mittelpunkt $Q(1; y_Q; z_Q)$ und dem Radius $r > 0$.

Sei $\mu := \frac{1}{4 + y_Q^2 + z_Q^2 - r^2}$. Dann bildet Σ den Kreis K auf die Ebene $(x; y; z) \cdot \vec{n} = 1$ ab, zu der $\vec{n} := (-1 + 8 \cdot \mu; 4 \cdot \mu \cdot y_Q; 4 \cdot \mu \cdot z_Q)$ der Ortsvektor des Pols ist.

Der Punkt $R(-1 + 8 \cdot v; 4 \cdot v \cdot y_Q; 4 \cdot v \cdot z_Q)$ mit $v := \frac{1}{4 + y_Q^2 + z_Q^2 + r^2}$ liegt auf dieser

Ebene und auch gemeinsam mit dem Pol und Q' auf der Geraden QZ .

Σ bildet eine Gerade in E auf die Menge der Punkte ungleich Z eines Kreises durch Z ab. Jeder Kreis in der Einheits-Kugelfläche ist Bild eines Kreises oder einer Geraden.

3. Sei $w = (2; y_Q; z_Q)$. Dann ist $Q' = \Sigma((1; y_Q; z_Q))$ die erste Zeile der Matrix S_w .

Wenn in E eine Kurve durch den Punkt $Q(1; y_Q; z_Q)$ den Tangentenvektor $(a; b)$ hat, dann hat die Σ -Bildkurve den Tangentenvektor $-4 \cdot \lambda \cdot (0; a; b) \cdot S_w$.

Das Skalarprodukt von $(0; a_1; b_1) \cdot S_w$ und $(0; a_2; b_2) \cdot S_w$ ist $a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2$ und das Vektorprodukt $(a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2) \cdot \Sigma((1; y_Q; z_Q))$.

4. Wenn sich zwei Kurven in E unter einem Winkel der Größe α schneiden, dann schneiden sich die Bildkurven bei Σ unter einem Winkel mit der gleichen Größe α .

5. Σ bildet die Menge der erweiterten Kreisbüschel in E bijektiv auf die Menge der Kugel-Kreisbüschel ab.

Beweis : 1. Die Verbindungsgerade von Z mit einem Punkt $Q(1; y; z)$ in E hat eine Parameterdarstellung $(-1; 0, 0) + t \cdot ((1; y; z) - (-1; 0; 0)) = (2 \cdot t - 1; t \cdot y; t \cdot z)$. Die Einsetzung in die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ ergibt $(2 \cdot t - 1)^2 + (t \cdot y)^2 + (t \cdot z)^2 - 1 = 0$ mit den Lösungen $t = 0$ und $t = \frac{4}{4 + y^2 + z^2} = 4 \cdot \lambda$. Die Einsetzung in $(2 \cdot t - 1; t \cdot y; t \cdot z)$ ergibt die Formel für Σ in der 1. Behauptung.

Unter der Voraussetzung von $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ergibt die Ersetzung von y durch $\frac{2 \cdot y}{1+x}$ und von

z durch $\frac{2 \cdot z}{1+x}$ in $\frac{4}{4 + y^2 + z^2} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot (4 - y^2 - z^2); y; z\right)$ den Term $(x; y; z)$. Daraus folgt die

Formel für Σ^{-1} .

2. $(a; b)$ sei ein Vektor in E mit der Länge 1.

Man errechnet für das Skalarprodukt

$$\Sigma((1; y_Q + r \cdot a; z_Q + r \cdot b)) \cdot \vec{n} = 1 + \frac{8 \cdot r^2 \cdot (1 - a^2 - b^2)}{(4 + y_Q^2 + z_Q^2 - r^2) \cdot (4 + (y_Q + r \cdot a)^2 + (z_Q + r \cdot b)^2)} = 1.$$

\vec{n} ist folglich ein Vektor, der senkrecht auf einer Ebene steht, in der sich alle Punkte $\Sigma((1; y + r \cdot a; z + r \cdot b))$ befinden, für die $a^2 + b^2 = 1$ ist. Das Produkt des Abstands des

Ursprungs von der Ebene und dem Betrag dieses Normalenvektors ist 1. Darum ist dieser Vektor Ortsvektor des Pols.

Wegen $(-1+8\cdot\mu; 4\cdot\mu\cdot y_Q; 4\cdot\mu\cdot z_Q)\cdot(-1+8\cdot\nu; 4\cdot\nu\cdot y_Q; 4\cdot\nu\cdot z_Q)=1$ liegt R auf der Bildkreis-Ebene. R und der Pol liegen auf der Geraden ZQ, weil deren Punkte genau die Ortsvektoren mit der Form $(-1;0;0)+s\cdot(2;y_Q;z_Q)=(-1+2\cdot s;s\cdot y_Q;s\cdot z_Q)$ haben.

Σ bildet also jeden Kreis um Q in E auf einen Kreis der Kugelfläche ab.

Da jeder Kreis durch drei verschiedene Punkte eindeutig festgelegt wird und bei Σ jeder Punkt der Kugelfläche mit Ausnahme von Z als Bildpunkt auftritt, kommt bei Σ jeder Kreis der Kugelfläche, der nicht durch Z geht, als Bild eines Kreises in E vor.

Jede Gerade g in E wird auf einen Kreis durch Z mit Ausnahme von Z abgebildet, weil die Ebene durch Z und g die Kugelfläche in einem Kreis schneidet. Da die Ebene eines Kreises durch Z die Ebene E in einer Geraden schneidet, kommt auch jeder Kreis durch Z als Bild einer Geraden in E vor.

3. Wir betrachten die Kurven $r \rightarrow (1; y_Q + r \cdot a_1; z_Q + r \cdot b_1)$ und $r \rightarrow (1; y_Q + r \cdot a_2; z_Q + r \cdot b_2)$ mit den Tangentenvektoren $(a_1; b_1)$ bzw. $(a_2; b_2)$ im Punkt Q, die nicht unbedingt die Länge 1 haben.

$$\frac{\Sigma((1; y_Q + r \cdot a_1; z_Q + r \cdot b_1)) - \Sigma((1; y_Q; z_Q))}{r} =$$

$$\left(\frac{-16 \cdot a_1 \cdot y_Q - 16 \cdot b_1 \cdot z_Q - 8 \cdot r \cdot (a_1^2 + b_1^2)}{(4 + y_Q^2 + z_Q^2) \cdot (4 + (y_Q + r \cdot a_1)^2 + (z_Q + r \cdot b_1)^2)}; \frac{4 \cdot a_1 \cdot (4 + y_Q^2 - z_Q^2) - 8 \cdot b_1 \cdot y_Q \cdot z_Q - 8 \cdot r \cdot (a_1^2 + b_1^2)}{(4 + y_Q^2 + z_Q^2) \cdot (4 + (y_Q + r \cdot a_1)^2 + (z_Q + r \cdot b_1)^2)}; \right.$$

$$\left. \frac{4 \cdot b_1 \cdot (4 + y_Q^2 - z_Q^2) - 8 \cdot a_1 \cdot y_Q \cdot z_Q - 8 \cdot r \cdot (a_1^2 + b_1^2)}{(4 + y_Q^2 + z_Q^2) \cdot (4 + (y_Q + r \cdot a_1)^2 + (z_Q + r \cdot b_1)^2)} \right).$$

Zur Grenzwertbildung $r \rightarrow 0$ kann $r = 0$ gesetzt werden. dann ergibt sich

$$\left(\frac{-16 \cdot a_1 \cdot y_Q - 16 \cdot b_1 \cdot z_Q}{(4 + y_Q^2 + z_Q^2)^2}; \frac{4 \cdot a_1 \cdot (4 - y_Q^2 + z_Q^2) - 8 \cdot b_1 \cdot y_Q \cdot z_Q}{(4 + y_Q^2 + z_Q^2)^2}; \right.$$

$$\left. \frac{4 \cdot b_1 \cdot (4 + y_Q^2 - z_Q^2) - 8 \cdot a_1 \cdot y_Q \cdot z_Q}{(4 + y_Q^2 + z_Q^2)^2} \right) = -4 \cdot \lambda \cdot (0; a_1; b_1) \cdot S_w.$$

Daraus errechnet man das angegebene Skalarprodukt und das Vektorprodukt.

4. folgt aus 3. , da das Skalarprodukt $(a_1; b_1) \cdot (a_2; b_2) = (a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2)$ der Vektoren in E proportional zu $16 \cdot \lambda^2 \cdot (a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2)$ ist und darum der Kosinus des Winkels zwischen Bild- und Urbild-Vektoren gleich ist. Wegen der Proportionalität der Determinante $a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2$ mit dem Vektorprodukt $16 \cdot \lambda^2 \cdot (a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2) \cdot \Sigma((1; y; z))$ gibt es bei Σ keine Invertierung der Winkelgrößen, wenn für die Winkelmessung die Sicht von außen auf die Halbkugel (also in Gegenrichtung des Vektors $\Sigma((1; y; z))$) zugrundegelegt wird.

5. Wenn \mathbf{B} ein elliptisches erweitertes Kreisbüschel in E mit den gemeinsamen Punkten Q und R ist, dann ist $\Sigma(\mathbf{B})$ das elliptische g-Kugel-Kreisbüschel zu der Geraden g durch die gemeinsamen Punkten $\Sigma(Q)$ und $\Sigma(R)$.

Ein parabolisches erweitertes Kreisbüschel \mathbf{B} in E wird eindeutig durch den gemeinsamen Schnittpunkt Q der Kreise und die Potenzgeraden h festgelegt. $\Sigma(\mathbf{B})$ ist dann die Menge der Kugel-Kreise durch $\Sigma(Q)$, welche den Kreis zu $\Sigma(h)$ berühren. Darum ist $\Sigma(\mathbf{B})$ das Kugel-Kreisbüschel zur gemeinsamen Tangentengeraden g dieser Kugel-Kreise.

Jeder Kreis K eines hyperbolischen erweiterten Kreisbüschels \mathbf{B} in E ist orthogonal zu allen Kreisen des elliptischen Kreisbüschels mit den Nullkreis-Punkten Q und R von \mathbf{B} als gemeinsame Punkte. Sei j die Gerade durch $\Sigma(Q)$ und $\Sigma(R)$. $\Sigma(K)$ ist ein Kugel-Kreis, der nach 4. zu allen Kugel-Kreisen des j -Kugel-Kreisbüschels orthogonal ist.

Wenn die Tangentialebenen von $\Sigma(Q)$ und $\Sigma(R)$ parallel sind, dann besteht das j -Kugel-Kreisbüschel aus Großkreisen und die Ebene F , in der $\Sigma(K)$ liegt, ist parallel zu den Tangentialebenen. \mathbf{B} ist dann das F -Kugel-Kreisbüschel.

Wenn die Tangentialebenen von $\Sigma(Q)$ und $\Sigma(R)$ sich in einer Geraden g schneiden, dann muss E wegen Satz 19 durch g gehen. Darum ist \mathbf{B} dann das g -Kugel-Kreisbüschel.

Damit ist gezeigt, dass Σ Kreisbüschel in E auf Kugel-Kreisbüschel abbildet. Dabei werden verschiedene Kreisbüschel auf verschiedene Kugel-Kreisbüschel abgebildet, da Kreisbüschel in E eindeutig durch zwei Punkte (gemeinsame Punkte oder Nullkreis-Punkte) oder einen Punkt und die Potenzgerade festgelegt werden. Darum bildet Σ Kreisbüschel injektiv ab. Die Abbildung ist auch surjektiv, da jedes Kugel-Kreisbüschel als Bild vorkommt. \square

Ergänzung : Die Aussagen 2 und 4 gelten auch dann, wenn man Z durch einen anderen Punkt der Einheitskugelfläche und die Ebene E durch eine Ebene ersetzt, die senkrecht zur Verbindungsgeraden von Z mit dem Ursprung steht, aber Z nicht enthält. Man erkennt dies, indem man Z und E erst um den Ursprung in Z' bzw. E' dreht und dann eventuell auf E' eine Streckung mit Z' als Zentrum anwendet.

Zum Nachweis der hyperbolischen Abstandstreue bei der Restriktion der Abbildung Σ auf das Poincare-Modell benötigen wir den folgenden Hilfssatz 3 über Doppelverhältnisse. Abbildung 21 zeigt den Zusammenhang mit dem Halbkugel-Modell. g_1 ist die Rechtsachse des Poincare-Modells, die parallel zur y -Achse des räumlichen Koordinatensystems durch den Punkt $(1; 0; 0)$ verläuft. g_2 ist eine Gerade durch die Enden einer H -Geraden auf dem Randkreis der Halbkugelfläche. Die Zuordnung der Punkte auf g_2 zu den Punkten auf g_1 , für welche die Verbindungsgerade mit dem Punkt $Z(-1; 0; 0)$ übereinstimmt, wird ‚Perspektivität von g_1 nach g_2 mit dem Zentrum Z' ‘ genannt. t_1, t_2, t_3 und t_4 sind Parameter-Werte in einem lokalen Koordinatensystem auf g_1 . Die Differenzen der Werte sind proportional zu den signierten euklidischen Abständen der zugehörigen Punkte. Wenn der Null-Punkt und der Eins-Punkt des lokalen Koordinatensystems den Abstand 1 haben, dann sind die Differenzen der t -Werte die signierten euklidischen Abstände selbst. Entsprechendes gilt für die u -Werte bei g_2 . Hilfssatz 3 zeigt, dass für das Doppelverhältnis entsprechender Punkte auf den beiden

Geraden gilt: $\frac{t_2 - t_3}{t_2 - t_4} : \frac{t_1 - t_3}{t_1 - t_4} = \frac{u_2 - u_3}{u_2 - u_4} : \frac{u_1 - u_3}{u_1 - u_4}$. Die Hälfte des Logarithmus vom

Doppelverhältnis der t -Werte bzw. u -Werte gibt einen signierten hyperbolischen Abstand in dem Poincare-Modell bzw. Halbkugel-Modell an.

Unter dem ‚unendlich fernen Punkt‘ einer Geraden g , der in der Formulierung von Hilfssatz 3 benutzt wird, kann man sich z. B. die Menge der zu g parallelen Geraden vorstellen.

Hilfssatz 4 : g_1 und g_2 seien zwei Geraden im \mathbf{R}^2 mit den Parameter-Darstellungen $\vec{p}_1(t) = (a_1; b_1) + t \cdot (c_1; d_1)$ bzw. $\vec{p}_2(u) = (a_2; b_2) + u \cdot (c_2; d_2)$ für die Ortsvektoren von Punkten auf g_1 bzw. g_2 . Wir ergänzen die Punktmenge von g_1 bzw. g_2 um einen ‚unendlich fernen Punkt‘ mit dem Parameter $t = \infty$ bzw. $u = \infty$, der auf allen Parallelen zu g_1 bzw. g_2 liegt. $Z(e; f)$ sei ein Punkt, der weder auf g_1 noch auf g_2 liegt. Π sei die Perspektivität mit dem Zentrum Z , die g_1 auf g_2 abbildet, d.h. die Abbildung, die dem Ortsvektor eines Punktes P_1 auf g_1 den Ortsvektor des Schnittpunkts P_2 der Geraden ZP_1 und g_2 zuordnet. $\hat{\Pi}$ sei die Abbildung, die einem Parameter-Wert t den Parameter-Wert u mit $\vec{p}_2(u) = \Pi(\vec{p}_1(t))$ zuordnet. Dann gilt:

1. Es gibt Zahlen α, β, γ und δ mit $\hat{\Pi}(t) = \frac{\alpha + t \cdot \beta}{\gamma + t \cdot \delta}$ für alle $t \in \mathbf{R}$.
2. Das Doppelverhältnis $\frac{\hat{\Pi}(t_2) - \hat{\Pi}(t_3)}{\hat{\Pi}(t_2) - \hat{\Pi}(t_4)} : \frac{\hat{\Pi}(t_1) - \hat{\Pi}(t_3)}{\hat{\Pi}(t_1) - \hat{\Pi}(t_4)}$ stimmt mit $\frac{t_2 - t_3}{t_2 - t_4} : \frac{t_1 - t_3}{t_1 - t_4}$ überein.

Beweis : 1. Die Gleichung $\det \begin{pmatrix} a_1 + t \cdot c_1 & b_1 + t \cdot d_1 & 1 \\ a_2 + u \cdot c_2 & b_2 + u \cdot d_2 & 1 \\ e & f & 1 \end{pmatrix} = 0$ hat die Lösung

$$u = \frac{e \cdot (b_1 - b_2) - f \cdot (a_1 - a_2) + a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 + t \cdot (e \cdot d_1 - f \cdot c_1 + b_2 \cdot c_1 - a_2 \cdot d_1)}{e \cdot d_2 - f \cdot c_2 + b_1 \cdot c_2 - a_1 \cdot d_2 + t \cdot (c_2 \cdot d_1 - c_1 \cdot d_2)}.$$

Daraus folgt die Behauptung.

2. Mit der Darstellung von $\hat{\Pi}(t)$ mit Hilfe von α, β, γ und δ errechnet man die Gleichheit der Doppelverhältnisse ohne auf die Definitionen von α, β, γ und δ zurückgehen zu müssen. \square

Wenn man die Pseudosphäre über die Abbildung Ω aus Satz 18 zuerst in das Poincare-Modell

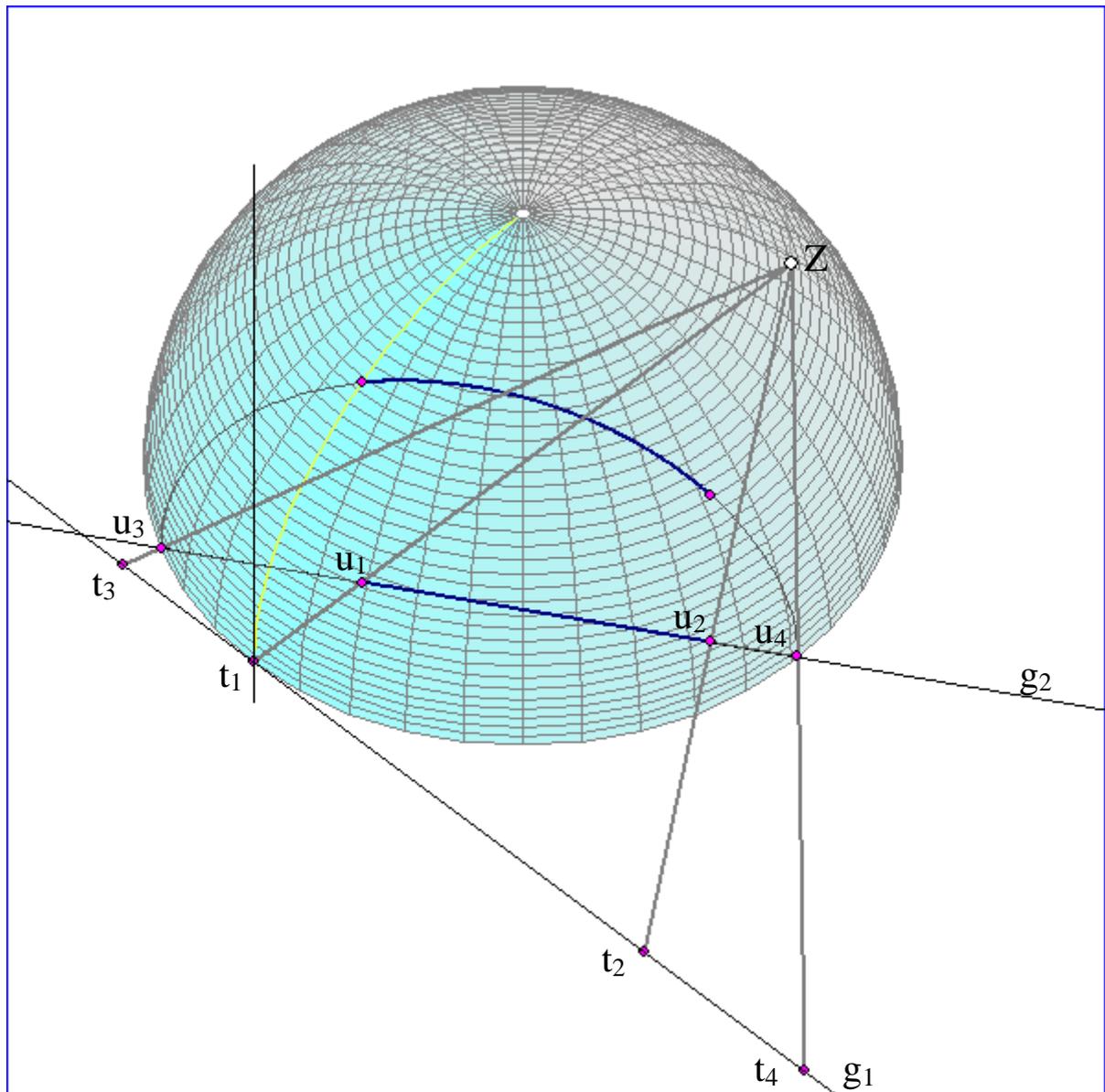


Abb. 21

einbettet und anschließend über die stereographische Projektion in das Halbebenen-Modell, dann ist es nützlich, in der Ebene E ein lokales Koordinatensystem mit Koordinaten $w := \frac{y}{2 \cdot k}$ und $s := \frac{z}{2 \cdot k}$ einzuführen, wobei k eine positive Konstante ist. Wenn man $y = 2 \cdot k \cdot w$ und $z = 2 \cdot k \cdot s$ in den Termen für λ und $\Sigma((1; y; z))$ ersetzt, ergibt sich $\lambda = \frac{1}{1 + k^2 \cdot (w^2 + s^2)}$ und $(\lambda \cdot (1 - k^2 \cdot (w^2 + s^2)); 2 \cdot \lambda \cdot w; 2 \cdot \lambda \cdot s)$. Die Grenzgerade $s = 1$ des Bildes bei Ω wird durch Σ auf den Kreis abgebildet, der sich beim Schneiden der Ebene durch diese Gerade und den Punkt Z mit der Halbkugelfläche ergibt. Der Schatten davon in der x - y -Ebene ist eine Ellipse.

Durch Veränderung von k lässt sich die Größe dieser Ellipse und damit des Bildes der Pseudosphäre beeinflussen, denn bei Verkleinerung von k wird der Bildbereich größer.

Satz 21 : Sei $k > 0$ und Σ_k die Abbildung

$(w; s) \rightarrow \left(\frac{1 - k^2 \cdot (w^2 + s^2)}{1 + k^2 \cdot (w^2 + s^2)}; \frac{2 \cdot k \cdot w}{1 + k^2 \cdot (w^2 + s^2)}; \frac{2 \cdot k \cdot s}{1 + k^2 \cdot (w^2 + s^2)} \right)$ von \mathbf{R}^2 auf die Menge der

Punkte ungleich $Z(-1; 0; 0)$ auf der Einheitskugelfläche. Σ_k hat die Umkehrabbildung

$$\Sigma_k^{-1} : \left(\sqrt{1 - 4 \cdot k^2 \cdot (s^2 + w^2)}; 2 \cdot k \cdot w; 2 \cdot k \cdot s \right) \rightarrow \left(\frac{4 \cdot k \cdot w}{1 + \sqrt{1 - 4 \cdot k^2 \cdot (s^2 + w^2)}}; \frac{4 \cdot k \cdot s}{1 + \sqrt{1 - 4 \cdot k^2 \cdot (s^2 + w^2)}} \right),$$

$$1 - 4 \cdot k^2 \cdot (s^2 + w^2) \geq 0.$$

Σ_k bildet die Menge P^P der Punkte $(w; s)$ mit $s > 0$ des Poincare-Modells auf die Menge P^H des Halbkugel-Modells ab und hat folgende Eigenschaften:

1. $(w; s)^P$ liegt genau dann auf der P-Geraden $[w_0; s_0]^P$, wenn $\Sigma_k((w; s)^P)$ Punkt der H-Geraden $\left[-1 + k^2 \cdot (w_0^2 - s_0^2); -2 \cdot k \cdot w_0; 1 + k^2 \cdot (w_0^2 - s_0^2) \right]^H$ ist. $(w; s)^P$ liegt genau dann auf der P-Geraden $[w_0]^P$, wenn $\Sigma_k((w; s)^P)$ Punkt der H-Geraden $[k \cdot w_0; -1, k \cdot w_0]^H$ ist. Diese H-Geraden werden mit $\Sigma_k([w_0; s_0]^P)$ bzw. $\Sigma_k([w_0]^P)$ bezeichnet.
2. Wenn sich zwei P-Geraden schneiden, dann haben auch die Bilder bei Σ_k einen gemeinsamen Punkt und die Größe des Schnittwinkels ist gleich.
3. Der signierte P-Abstand zwischen zwei P-Punkten stimmt mit dem signierten H-Abstand zwischen ihren Bildern bei Σ_k überein.
4. Das Σ_k -Bild eines P-Kreises K mit dem P-Zentrum Q ist ein euklidischer Kugel-Kreis, der vollständig in der Halbkugelfläche liegt. $\Sigma_k(K)$ ist der H-Kreis mit dem H-Zentrum $\Sigma_k(Q)$, dessen H-Radius mit dem P-Radius von K übereinstimmt.
5. Das Σ_k -Bild der P-Abstandskurve K einer P-Geraden g ist ein euklidischer Kugel-Kreisbogen mit Endpunkten auf dem Randkreis der Halbkugelfläche. Das Σ_k -Bild der P-Abstandskurve K' , die durch P-Spiegelung von K an g entsteht, ist ein Kugel-Kreisbogen mit den gleichen Endpunkten. $\Sigma_k(K)$ und $\Sigma_k(K')$ sind H-Abstandskurven von g , deren H-Abstand mit dem P-Abstand von K und K' übereinstimmt. $\Sigma_k(K)$ und die Kurve, die durch euklidische Spiegelung von $\Sigma_k(K')$ an der x - y -Ebene entstehen, ergänzen sich auf der Kugelfläche zu einem Kreis.
6. \mathbf{B} sei ein hyperbolisches Kreisbüschel im \mathbf{R}^2 , dessen Nullkreis-Punkte Q und R symmetrisch zur Rechtsachse liegen. Q sei P-Punkt. Dann ist $\Sigma_k(\mathbf{B})$ das F-Kugel-Kreisbüschel zur x - y -Ebene F oder das g -Kugel-Kreisbüschel zu einer Geraden g in der x - y -Ebene, die die Einheitskugelfläche nicht schneidet. Die Teilmenge der P-Kreise in \mathbf{B} wird auf die Teilmenge der H-Kreise in $\Sigma_k(\mathbf{B})$ abgebildet, die das gleiche H-Zentrum haben wie $\Sigma_k(Q)$.

Beweis : Die Abbildung Σ_k ergibt sich dadurch, dass man in der Abbildungsvorschrift von Σ in Satz 20 an die Stelle von y bzw. z den Term $2 \cdot k \cdot w$ bzw. $2 \cdot k \cdot s$. Wir identifizieren also das Poincare-Modell mit der Ebene $E: x = 1$ im \mathbf{R}^3 , in der ein lokales Koordinatensystem mit den Parametern w und s eingeführt wurde.

1. $g = [w_0; s_0]^P$ sei eine Kreisgerade. Da Σ Kreise in E winkeltreu auf Kreise der Einheitskugelfläche abbildet und dabei die obere Halbebene als Bild die obere Halbkugelfläche hat, wird g auf einen Halbkreis senkrecht zum Rand der Halbkugelfläche

abgebildet, also auf eine H-Geraden. Die Enden $(w_0 \pm s_0; 0)$ werden auf die Punkte

$\left(\frac{1-k^2 \cdot (w_0 \pm s_0)^2}{1+k^2 \cdot (w_0 \pm s_0)^2}; \frac{2 \cdot k \cdot (w_0 \pm s_0)}{1+k^2 \cdot (w_0 \pm s_0)^2}; 0 \right)$ abgebildet, die Enden der H-Geraden

$\left[-1+k^2 \cdot (w_0^2 - s_0^2); -2 \cdot k \cdot w_0; 1+k^2 \cdot (w_0^2 - s_0^2) \right]^H$ sind.

Wenn $g = [w_0]^P$ eine Meridiangerade ist, geht der Bildkreis von g durch Z und das zweite

Ende $\left(\frac{1-k^2 \cdot w_0^2}{1+k^2 \cdot w_0^2}; \frac{2 \cdot k \cdot w_0}{1+k^2 \cdot w_0^2}; 0 \right)$. Das Bild von $g = [w_0]^P$ ist darum die H-Gerade

$[k \cdot w_0; -1, k \cdot w_0]^H$.

2. folgt aus der Winkeltreue der stereographischen Projektion.

3. Wir beziehen uns auf Hilfssatz 4.

Der signierte Abstand von P-Punkten $Q_1 = (w_1; s_1)^P$ und $Q_2 = (w_2; s_2)^P$ auf einer

Kreisgeraden $g = [w_0; s_0]^P$ wird durch $0,5 \cdot \ln \left(\frac{w_2 - (w_0 - s_0)}{w_2 - (w_0 + s_0)}; \frac{w_1 - (w_0 - s_0)}{w_1 - (w_0 + s_0)} \right)$ bestimmt.

Den Parameterwerten t_1, t_2, t_3, t_4 in Abbildung 20 entsprechen die Werte $w_1, w_2, w_0 - s_0, w_0 + s_0$.

Wenn die Σ_k -Bildgerade h von g die Enden E_1 und E_2 mit $E_1 < E_2$ hat und Q' bzw. R' die

Schattenpunkte von $\Sigma_k(Q)$ und $\Sigma_k(R)$ sind, dann ist $0,5 \cdot \ln \left(\frac{|E_1 R'|}{|R' E_2|}; \frac{|E_1 Q'|}{|Q' E_2|} \right)$ der signierte

H-Abstand zwischen den Bildpunkten. Sei \vec{m} der Ortsvektor des Mittelpunkts der Strecke $E_1 E_2$ ist und \vec{v} ein Vektor mit der Länge 1 in Richtung des Schattens h' von h . In der Parameter-Darstellung $\vec{p}(u) = \vec{m} + u \cdot \vec{v}$ von h' haben dann Q', R', E_1 und E_2 die Parameter

u_1, u_2, u_3 und u_4 mit $\frac{|E_1 R'|}{|R' E_2|}; \frac{|E_1 Q'|}{|Q' E_2|} = \frac{u_2 - u_3}{u_2 - u_4}; \frac{u_1 - u_3}{u_1 - u_4}$. Darum folgt die Behauptung aus

Hilfssatz 4.

4. Da die P-Kreise nach Satz 14 euklidische Kreise sind, werden sie nach Satz 20 in euklidische Kreise abgebildet, die ganz in der oberen Halbkugelfläche liegen, und diese Kreise sind nach 3. auch H-Kreise.

5. Aus dem gleichen Grund ergibt sich die Behauptung 5 aus Satz 15.

6. Nach Satz 20 wird das hyperbolische Kreisbüschel \mathbf{B} in ein hyperbolisches Kugel-Kreisbüschel mit den Nullkreis-Punkten $\Sigma(Q)$ und $\Sigma(Q')$ abgebildet. Da Q und R symmetrisch zur Rechtsachse liegen, sind $\Sigma(Q)$ und $\Sigma(R)$ symmetrisch zur x - y -Ebene. Wenn diese beiden Punkte auf der z -Achse liegen, ist $\Sigma(\mathbf{B})$ das F-Kugel-Kreisbüschel mit der x - y -Ebene F . Andernfalls schneiden sich die Tangentialebenen von $\Sigma(Q)$ und $\Sigma(R)$ in einer Geraden g in der x - y -Ebene, welche die Kugelfläche nicht schneidet. Die H-Kreise in \mathbf{B} haben alle das gleiche H-Zentrum $\Sigma(Q)$, weil alle P-Kreise in \mathbf{B} das P-Zentrum Q haben. \square

17. Maß-Form im Halbkugel-Modell

Satz 21 zeigt, dass die Abbildung Σ_k sowohl winkel- als auch hyperbolisch längentreu ist.

Darum ist es möglich, mit Hilfe von Σ_k^{-1} die Maß-Form vom Poincare-Modell auf das Halbkugel-Modell zu übertragen. Wir benutzen dabei kartesische Koordinaten. Ein

Tangentenvektor an die Halbkugelfläche im Punkt $Q(x_Q; y_Q; \sqrt{1-x_Q^2-y_Q^2})$ ist dann ein

Vektor $\vec{t} = \left(x'; y'; -\frac{x' \cdot x_Q + y' \cdot y_Q}{\sqrt{1-x_Q^2-y_Q^2}} \right)$, denn wegen

$x' \cdot x_Q + y' \cdot y_Q - \frac{x' \cdot x_Q + y' \cdot y_Q}{\sqrt{1-x_Q^2-y_Q^2}} \cdot \sqrt{1-x_Q^2-y_Q^2} = 0$ liegt \vec{t} in der Tangentialebene von Q . Wir

benutzen die Abkürzung $\vec{t} = (x'; y')^H$. Der zugehörige Tangentenvektor im Punkt $R = \Sigma_k^{-1}(Q)$

ergibt sich mit der Matrix S^{-1} aus Satz 20 zu $\vec{t} \cdot \frac{1}{2 \cdot k} \cdot S^{-1}$. Dabei ist der Faktor $\frac{1}{2 \cdot k}$ nötig, weil

in der Tangentialebene $E: x = 1$ die kartesischen Koordinaten y und z durch $w = \frac{1}{2 \cdot k} \cdot y$ und

$s = \frac{1}{2 \cdot k} \cdot z$ ersetzt wurden. Wenn in der Darstellung von S^{-1} in Satz 20 $y = \frac{2 \cdot y_Q}{1+x_Q}$ und

$z = \frac{2 \cdot \sqrt{1-x_Q^2-y_Q^2}}{1+x_Q}$ eingesetzt wird, ergibt sich

$$(w'; s') = \vec{t} \cdot \frac{1}{2 \cdot k} \cdot \begin{pmatrix} x_Q & -\frac{2 \cdot y_Q}{1+x_Q} & -\frac{2 \cdot \sqrt{1-x_Q^2-y_Q^2}}{1+x_Q} \\ y_Q & 2 \cdot \frac{1+x_Q-y_Q^2}{(1+x_Q)^2} & -\frac{2 \cdot y_Q \cdot \sqrt{1-x_Q^2-y_Q^2}}{(1+x_Q)^2} \\ \sqrt{1-x_Q^2-y_Q^2} & -\frac{2 \cdot y_Q \cdot \sqrt{1-x_Q^2-y_Q^2}}{(1+x_Q)^2} & 2 - 2 \cdot \frac{1+x_Q-y_Q^2}{(1+x_Q)^2} \end{pmatrix} =$$

$\left(0; \frac{-x' \cdot y_Q + y' \cdot (1+x_Q)}{k \cdot (1+x_Q)^2}, -\frac{x' \cdot (1+x_Q-y_Q^2) + y' \cdot y_Q \cdot (1+x_Q)}{k \cdot (1+x_Q)^2 \cdot \sqrt{1-x_Q^2-y_Q^2}} \right)$. Die Maß-Form des

Poincare-Modells ist $\mu_R^P((w'_1; s'_1); (w'_2; s'_2)) = \left(\frac{1}{s_R^2} \cdot (w'_1 \cdot w'_2 + s'_1 \cdot s'_2); \frac{1}{s_R^2} \cdot (w'_1 \cdot s'_2 - w'_2 \cdot s'_1) \right)$ mit

$s_R = \frac{\sqrt{1-x_Q^2-y_Q^2}}{k \cdot (1+x_Q)}$. Die erste Komponente der Maß-Form μ_Q^H des Halbkugel-Modells ist

darum $\frac{1}{s_R^2} \cdot (w'_1 \cdot w'_2 + s'_1 \cdot s'_2) = \frac{k^2 \cdot (1+x_Q)^2}{1-x_Q^2-y_Q^2} \cdot \left(\frac{-x'_1 \cdot y_Q + y'_1 \cdot (1+x_Q)}{k \cdot (1+x_Q)^2} \cdot \frac{-x'_2 \cdot y_Q + y'_2 \cdot (1+x_Q)}{k \cdot (1+x_Q)^2} + \right.$

$$\left. \frac{x'_1 \cdot (1+x_Q-y_Q^2) + y'_1 \cdot y_Q \cdot (1+x_Q)}{k \cdot (1+x_Q)^2 \cdot \sqrt{1-x_Q^2-y_Q^2}} \cdot \frac{x'_2 \cdot (1+x_Q-y_Q^2) + y'_2 \cdot y_Q \cdot (1+x_Q)}{k \cdot (1+x_Q)^2 \cdot \sqrt{1-x_Q^2-y_Q^2}} \right) =$$

$$\frac{x'_1 \cdot x'_2 \cdot (1-y_Q^2) + x'_1 \cdot y'_2 \cdot x_Q \cdot y_Q + y'_1 \cdot x'_2 \cdot x_Q \cdot y_Q + y'_1 \cdot y'_2 \cdot (1-x_Q^2)}{(1-x_Q^2-y_Q^2)^2} =$$

$$(x'_1; y'_1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1-y_Q^2}{(1-x_Q^2-y_Q^2)^2} & \frac{x_Q \cdot y_Q}{(1-x_Q^2-y_Q^2)^2} \\ \frac{x_Q \cdot y_Q}{(1-x_Q^2-y_Q^2)^2} & \frac{1-x_Q^2}{(1-x_Q^2-y_Q^2)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix}.$$

Analog erhält man die 2. Komponente:

$$\frac{1}{s_R^2} \cdot (w'_1 \cdot s'_2 - w'_2 \cdot s'_1) = \frac{x'_1 \cdot y'_2 - x'_2 \cdot y'_1}{(\sqrt{1-x_Q^2-y_Q^2})^3} = (x'_1; y'_1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{(\sqrt{1-x_Q^2-y_Q^2})^3} \\ \frac{-1}{(\sqrt{1-x_Q^2-y_Q^2})^3} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix}.$$

Um die Maß-Form auch für Polarkoordinaten zu bestimmen, benutzen wir wie bei der Pseudosphäre, dass die Ableitung von $(r(t) \cdot \cos(\psi(t)); r(t) \cdot \sin(\psi(t)))$ den Term

$r'(t) \cdot (\cos(\psi(t)); \sin(\psi(t))) + \psi'(t) \cdot r(t) \cdot (-\sin(\psi(t)); \cos(\psi(t)))$ ergibt. Darum gilt für die

Polarkoordinaten $(r'; \psi')$ eines Tangentenvektors am Punkt Q

$$(x'; y') = (r' \cdot \cos(\psi) - \psi' \cdot r \cdot \sin(\psi); r' \cdot \sin(\psi) + \psi' \cdot r \cdot \cos(\psi)) =$$

$$\left(r' \cdot \frac{x_Q}{\sqrt{x_Q^2 + y_Q^2}} - \psi' \cdot y_Q; r' \cdot \frac{y_Q}{\sqrt{x_Q^2 + y_Q^2}} + \psi' \cdot x_Q \right). \text{ Die Einsetzung von } x' \text{ und } y' \text{ in die Maß-}$$

Form -Terme in kartesischen Koordinaten ergibt für die erste Komponente der Maß-Form in Polarkoordinaten

$$(r'_1; \psi'_1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{(1-r_Q^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{r_Q^2}{1-r_Q^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r'_2 \\ \psi'_2 \end{pmatrix} \text{ und für die zweite } (r'_1; \psi'_1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{r_Q}{(\sqrt{1-r_Q^2})^3} \\ \frac{-r_Q}{(\sqrt{1-r_Q^2})^3} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r'_2 \\ \psi'_2 \end{pmatrix}.$$

Darin, dass hier auch die erste Matrix nur von r_Q abhängt, wird die Rotationssymmetrie des Halbkugel-Modells deutlich.

Wie bei der Pseudosphäre kann man zu jedem Punkt Q der Halbkugeloberfläche eine Funktion μ_Q

(ohne hochgestelltes H) definieren, die jedem Paar von Tangentenvektoren $(\vec{t}_1; \vec{t}_2)$ das

Zahlenpaar $(|\vec{t}_1| \cdot |\vec{t}_2| \cdot \cos(\alpha); |\vec{t}_1| \cdot |\vec{t}_2| \cdot \sin(\alpha))$ zuordnet, wobei $|\vec{t}_i|$ die euklidische Vektorlänge

ist und α die euklidische Winkelgröße zwischen den beiden Vektoren. Für einen

Tangentenvektor $\vec{t} = \left(x'; y'; -\frac{x' \cdot x_Q + y' \cdot y_Q}{\sqrt{1-x_Q^2-y_Q^2}} \right)$ benutzen wir auch hierbei die verkürzte

Koordinatendarstellung $\vec{t} = (x'; y')^H$.

Zwischen μ_Q und μ_Q^H gibt es einen einfachen Zusammenhang, nämlich

Satz 22 : Für alle H-Punkte $Q(x_Q; y_Q; \sqrt{1-x_Q^2-y_Q^2})$ ist $\mu_Q^H = \frac{1}{1-x_Q^2-y_Q^2} \cdot \mu_Q$, beide Komponenten von μ_Q werden also durch das Quadrat der Höhe von Q geteilt, um die Komponenten von μ_Q^H zu erhalten.

Beweis : Das (euklidische) Skalarprodukt von $\vec{t}_1 = \left(x'_1; y'_1; -\frac{x'_1 \cdot x_Q + y'_1 \cdot y_Q}{\sqrt{1-x_Q^2-y_Q^2}} \right)$ und $\vec{t}_2 = \left(x'_2; y'_2; -\frac{x'_2 \cdot x_Q + y'_2 \cdot y_Q}{\sqrt{1-x_Q^2-y_Q^2}} \right)$ ist $x'_1 \cdot x'_2 + y'_1 \cdot y'_2 + \frac{(x'_1 \cdot x_Q + y'_1 \cdot y_Q) \cdot (x'_2 \cdot x_Q + y'_2 \cdot y_Q)}{1-x_Q^2-y_Q^2} = \frac{x'_1 \cdot x'_2 \cdot (1-y_Q^2) + x'_1 \cdot y'_2 \cdot x_Q \cdot y_Q + y'_1 \cdot x'_2 \cdot x_Q \cdot y_Q + y'_1 \cdot y'_2 \cdot (1-x_Q^2)}{1-x_Q^2-y_Q^2}$. Dies ist die erste

Komponente von μ_Q . Die zweite ist der signierte Betrag des Vektorprodukts

$$\vec{t}_1 \times \vec{t}_2 = (x'_1 \cdot y'_2 - x'_2 \cdot y'_1) \left(\frac{x_Q}{\sqrt{1-x_Q^2-y_Q^2}}; \frac{y_Q}{\sqrt{1-x_Q^2-y_Q^2}}; 1 \right), \text{ n\u00e4mlich } \frac{x'_1 \cdot y'_2 - x'_2 \cdot y'_1}{\sqrt{1-x_Q^2-y_Q^2}}. \quad \square$$

Aus Satz 22 folgt, dass sich die H-L\u00e4nge eines Tangentenvektors beim H-Punkt Q dadurch ergibt, dass man die euklidische L\u00e4nge durch die H\u00f6he von Q teilt.

Als Anwendungsbeispiel der Ma\u00df-Form μ_Q^H betrachten wir die Bewegung

$t \rightarrow (t; 0; \sqrt{1-t^2})$; $t \in [0; 1)$ in kartesischen Koordinaten, die in Polarkoordinaten durch $t \rightarrow (t; 0)$; $t \in [0; 1)$ angegeben wird. In jedem Punkt der Bahn ist der Tangentenvektor durch $(1; 0)$ gegeben, die Vektorl\u00e4nge $\|(1; 0)\|_Q^H$ in der Ma\u00dfbestimmung des Halbkugel-Modells ist

aber f\u00fcr verschiedene Punkte Q unterschiedlich, n\u00e4mlich $\frac{1}{1-r_Q^2}$, wobei r_Q der Abstand vom

Ursprung ist. W\u00e4hrend die euklidische Geschwindigkeit konstant ist, nimmt die hyperbolische Geschwindigkeit dieser Bewegung also stark zu. Die L\u00e4nge des zur\u00fcckgelegten Wegs vom

Punkt $(0; 0)$ bis zum Punkt $(a; 0)$ betr\u00e4gt $\int_0^a \frac{1}{1-t^2} dt = 0,5 \cdot \ln \frac{1+a}{1-a}$ im Einklang mit der

Abstands-Definition des Halbkugel-Modells.

Bei der Bewegung $t \rightarrow (\tanh(t); 0) = \left(\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}; 0 \right)$ ist die hyperbolische Vektorl\u00e4nge beim

Punkt $(\tanh(t); 0)$ gleich $\frac{(\tanh(t))'}{1-(\tanh(t))^2} = 1$, die hyperbolische Geschwindigkeit also konstant,

aber die euklidische nimmt stark ab.

18. Inzidenz und Orthogonalit\u00e4t im Halbkugel-Modell

Die Abstands- und Winkelberechnung im Halbkugel-Modell und im Beltrami-Klein-Modell kann man vereinfachen, wenn man neben dem Skalarprodukt

$(a_1; b_1; c_1) \cdot (a_2; b_2; c_2) := a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2$ die folgende Verknüpfung $*$ benutzt, die ebenfalls zwei Tripeln reeller Zahlen eine Zahl zuordnet. Das Minus-Zeichen statt des Plus-Zeichens vor dem dritten Summanden ist hier typisch für den Übergang von euklidischen zu hyperbolischen Maßbestimmungen.

Definition : $(a_1; b_1; c_1) * (a_2; b_2; c_2) := a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 - c_1 \cdot c_2$

Die Verknüpfungen \cdot , \times und $*$ benutzen wir auch dann, wenn die Klammern eckig sind oder an den Klammern ein hochgestelltes H angehängt ist.

Hilfssatz 5 : $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ und \vec{v}_4 seien zwei Tripel reeller Zahlen. Dann gilt analog zur Lagrange-Identität $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot (\vec{v}_3 \times \vec{v}_4) = (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3) \cdot (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_4) - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_4) \cdot (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3)$ die Gleichung

$$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) * (\vec{v}_3 \times \vec{v}_4) = -(\vec{v}_1 * \vec{v}_3) \cdot (\vec{v}_2 * \vec{v}_4) + (\vec{v}_1 * \vec{v}_4) \cdot (\vec{v}_2 * \vec{v}_3).$$

Speziell ist

$$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1) \cdot (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2) - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2 \text{ und}$$

$$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) * (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = -(\vec{v}_1 * \vec{v}_1) \cdot (\vec{v}_2 * \vec{v}_2) + (\vec{v}_1 * \vec{v}_2)^2.$$

Um die im Folgenden behandelte Pol-Polaren-Korrelation rechnerisch zu erfassen, machen wir

Definition : $\overline{(a; b; c)} := (a; b; -c)$

Daraus ergeben sich unmittelbar folgende Rechenregeln:

Hilfssatz 6 : $(a_1; b_1; c_1) \cdot \overline{(a_2; b_2; c_2)} = (a_1; b_1; c_1) * (a_2; b_2; c_2)$

$$\overline{(a_1; b_1; c_1)} \times (a_2; b_2; c_2) = -\overline{(a_1; b_1; c_1)} \times \overline{(a_2; b_2; c_2)}$$

$$(a_0; b_0; c_0) * \overline{(a_1; b_1; c_1)} \times (a_2; b_2; c_2) = (a_0; b_0; c_0) \cdot ((a_1; b_1; c_1) \times (a_2; b_2; c_2)) = \det \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} =$$

$$a_0 \cdot b_1 \cdot c_2 + a_1 \cdot b_2 \cdot c_0 + a_2 \cdot b_0 \cdot c_1 - a_2 \cdot b_1 \cdot c_0 - a_1 \cdot b_0 \cdot c_2 - a_0 \cdot b_2 \cdot c_1$$

Im folgenden Satz 23 soll die Inzidenz und die Orthogonalität im Halbkugel-Modell mit kartesischen Koordinaten beschrieben werden. Dabei ist zu bedenken, dass der H-Punkt mit den kartesischen Koordinaten $(x; y; \sqrt{1-x^2-y^2})$ in Anlehnung an die projektive Geometrie

auch durch $(x; y; 1)^H$ mit hochgestelltem H dargestellt wird, und dieses Tripel mit

$(t \cdot x; t \cdot y; t)^H$ identifiziert wird, falls $t \neq 0$ ist. Der Punkt, der durch $(3; 4; 5)^H$ mit

hochgestelltem H dargestellt wird, ist also der Punkt der Halbkugelfläche, dessen x-Wert $\frac{3}{5}$

dessen y-Wert $\frac{4}{5}$ und dessen z-Wert $\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}$ ist. Er muss von dem Punkt $(3; 4; 5)$

mit z-Wert 5 unterschieden werden, bei dessen Darstellung kein hochgestelltes H benutzt wird. Der Sinn dieser verwirrenden Unterscheidung liegt in rechnerischen Vereinfachungen durch die Vermeidung von Nennern.

Satz 23 : Gegeben sei das Halbkugel-Modell mit der Punktmenge P^H und der Geradenmenge G^H . $(x; y; 1)^H$ stellt genau dann einen H-Punkt dar, wenn $(x; y; 1) * (x; y; 1) < 0$ ist. $[a; b; d]^H$ ist eine H-Gerade genau dann, wenn $(a; b; d) * (a; b; d) > 0$ ist, aber a und b nicht beide gleich Null sind. Außerdem gilt:

1. Inzidenz: $(x; y; 1)^H \in P^H$ liegt auf der Geraden $[a; b; d]^H$ genau dann, wenn $(x; y; 1) \cdot (a; b; d) = a \cdot x + b \cdot y + d \cdot 1 = 0$ ist.
2. Verschiedene H-Punkte $(x_1; y_1; 1)^H$ und $(x_2; y_2; 1)^H$ haben stets genau eine H-Verbindungsgerade, nämlich $(x_1, y_1, 1)^H \times (x_2, y_2, 1)^H = [y_1 - y_2, x_2 - x_1, x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1]^H$.
3. Orthogonalität : Die H-Gerade $[a_1; b_1; d_1]^H$ schneidet die H-Gerade $[a_2; b_2; d_2]^H$ genau dann senkrecht in einem H-Punkt, wenn $[a_1; b_1; d_1]^H * [a_2; b_2; d_2]^H = a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 - d_1 \cdot d_2 = 0$ gilt. Der H-Schnittpunkt ist dann $[a_1; b_1; d_1]^H \times [a_2; b_2; d_2]^H = \left(\frac{b_1 \cdot d_2 - b_2 \cdot d_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}, \frac{d_1 \cdot a_2 - d_2 \cdot a_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}, 1 \right)^H$.
4. $g_1 = [a_1; b_1; d_1]^H$ und $g_2 = [a_2; b_2; d_2]^H$ seien verschiedene H-Geraden. Wir kürzen die Tripel mit \vec{v}_1 und \vec{v}_2 ab.
 1. Fall: $(\vec{v}_1 * \vec{v}_2)^2 = (\vec{v}_1 * \vec{v}_1) \cdot (\vec{v}_2 * \vec{v}_2)$ Dann sind g_1 und g_2 hyperbolisch parallel.
 2. Fall: $(\vec{v}_1 * \vec{v}_2)^2 < (\vec{v}_1 * \vec{v}_1) \cdot (\vec{v}_2 * \vec{v}_2)$. Dann gibt es einen einzigen gemeinsame H-Punkt, nämlich $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^H = (b_1 \cdot d_2 - b_2 \cdot d_1; d_1 \cdot a_2 - d_2 \cdot a_1; a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)^H$
 3. Fall: $(\vec{v}_1 * \vec{v}_2)^2 > (\vec{v}_1 * \vec{v}_1) \cdot (\vec{v}_2 * \vec{v}_2)$. Dann gibt es eine einzige gemeinsame H-Lotgerade , nämlich $[\overline{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2}]^H = [b_1 \cdot d_2 - b_2 \cdot d_1; d_1 \cdot a_2 - d_2 \cdot a_1; -(a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)]^H$.

Beweis : $(x; y; 1)^H$ ist genau dann ein H-Punkt, wenn $(x; y; 1) * (x; y; 1) = x^2 + y^2 - 1 < 0$. Wenn man den Punkt durch eine Vielfaches $(t \cdot x; t \cdot y; t)^H$ mit $t \neq 0$ darstellt, gilt Entsprechendes, denn $t^2 > 0$.

$[a; b; d]^H$ ist eine H-Gerade genau dann, wenn die zugehörige Schnittebene mit der Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = -d$ einen euklidischen Abstand kleiner als 1 von Ursprung $(0; 0; 0)$

hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\left| \frac{-d}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| < 1$ gilt, also

$$(a; b; d) * (a; b; d) = a^2 + b^2 - d^2 > 0 \text{ ist.}$$

1. Die Inzidenz-Bedingung folgt unmittelbar aus der Gleichung $a \cdot x + b \cdot y + d = 0$.

2. Die H-Punkte $(x_1; y_1; 1)^H$ und $(x_2; y_2; 1)^H$ liegen in der Ebene mit der Gleichung $(y_1 - y_2) \cdot x + (x_2 - x_1) \cdot y + x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 = 0$, wie man durch Einsetzen erkennt. Diese Ebene hat einen euklidischen Abstand < 1 vom Ursprung, da z. B. der Punkt $(x_1; y_1; 0)$ der x-y-Ebene darauf liegt und einen euklidischen Abstand < 1 vom Ursprung hat.

3. Die Ebenen der H-Geraden $\vec{v}_1 = [a_1; b_1; d_1]^H$ und $\vec{v}_2 = [a_2; b_2; d_2]^H$ haben die Normalenvektoren $(a_1; b_1; 0)$ und $(a_2; b_2; 0)$. Die Geraden selbst sind genau dann orthogonal, wenn sie einen gemeinsamen Punkt $Q(x; y; z)$ auf der Halbkugeloberfläche haben und ihr Schnittwinkel 90° ist. Da der Schatten-Punkt $(x; y; 0)$ von Q auf den Ebenen beider Geraden liegt, gilt $a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = -d_1$ und $a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = -d_2$. Wenn die Geraden sich schneiden, haben sie einen Schnittwinkel von 90° genau dann, wenn die Vektoren $(a_1; b_1; 0) \times (x; y; z)$ und $(a_2; b_2; 0) \times (x; y; z)$ orthogonal sind, denn diese Vektoren liegen in der Tangentialebene von Q und sind senkrecht zu $(a_1; b_1; 0)$ bzw. $(a_2; b_2; 0)$. Die Kreuzprodukte sind genau dann orthogonal, wenn gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= ((a_1; b_1; 0) \times (x; y; z)) \cdot ((a_2; b_2; 0) \times (x; y; z)) = \\ &= ((a_1; b_1; 0) \cdot (a_2; b_2; 0)) \cdot ((x; y; z) \cdot (x; y; z)) - ((a_1; b_1; 0) \cdot (x; y; z)) \cdot ((a_2; b_2; 0) \cdot (x; y; z)) = \\ &= (a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) \cdot 1 - (a_1 \cdot x + b_1 \cdot y) \cdot (a_2 \cdot x + b_2 \cdot y) = a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 - d_1 \cdot d_2 = \\ &= [a_1; b_1; d_1]^H * [a_2; b_2; d_2]^H. \end{aligned}$$

Wenn für die H-Geraden $[a_1; b_1; d_1]^H * [a_2; b_2; d_2]^H = 0$ vorausgesetzt wird, ist

$[a_1; b_1; d_1]^H \times [a_2; b_2; d_2]^H = (b_1 \cdot d_2 - b_2 \cdot d_1; d_1 \cdot a_2 - d_2 \cdot a_1; a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)^H$ ein gemeinsamer H-Punkt, denn nach Hilfssatz 4 gilt

$$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) * (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = -(\vec{v}_1 * \vec{v}_1) \cdot (\vec{v}_2 * \vec{v}_2) + (\vec{v}_1 * \vec{v}_2)^2 = -(\vec{v}_1 * \vec{v}_1) \cdot (\vec{v}_2 * \vec{v}_2) < 0.$$

4. Aus $(\vec{v}_1 * \vec{v}_2)^2 = (\vec{v}_1 * \vec{v}_1) \cdot (\vec{v}_2 * \vec{v}_2)$ folgt mit Hilfssatz 4 $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) * (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = 0$. Wegen

$$0 = (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) * (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = (b_1 \cdot d_2 - b_2 \cdot d_1)^2 + (d_1 \cdot a_2 - d_2 \cdot a_1)^2 - (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)^2$$

ist dann $a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \neq 0$ und $R := \left(\frac{b_1 \cdot d_2 - b_2 \cdot d_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}; \frac{d_1 \cdot a_2 - d_2 \cdot a_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}; 0 \right)$ ein Punkt des Halbkugelrandes,

die Geraden folglich hyperbolisch parallel.

Aus $(\vec{v}_1 * \vec{v}_2)^2 < (\vec{v}_1 * \vec{v}_1) \cdot (\vec{v}_2 * \vec{v}_2)$ folgt $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) * (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) < 0$. Auch dann ist

$a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \neq 0$, aber R Schattenpunkt eines H-Punktes, nämlich von $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^H$.

Aus $(\vec{v}_1 * \vec{v}_2)^2 > (\vec{v}_1 * \vec{v}_1) \cdot (\vec{v}_2 * \vec{v}_2)$ folgt $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) * (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) > 0$. Für $\vec{v}_0 := \overline{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2}$ gilt dann $\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0 > 0$, $\vec{v}_1 * \vec{v}_0 = \vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = 0$ und $\vec{v}_2 * \vec{v}_0 = \vec{v}_2 \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = 0$. Darum ist \vec{v}_0 Tripel einer H-Geraden, die orthogonal zu g_1 und g_2 ist. \square

19. Abstände im Halbkugel-Modell

Definition : Unter dem H-Abstand einer H-Geraden g von einem H-Punkt Q verstehen wir den H-Abstand, den Q vom Fußpunkt des H-Lots auf g hat.

Unter dem H-Abstand von zwei H-Geraden g und h , die eine gemeinsame H-Orthogonale j haben, verstehen wir den H-Abstand der Schnittpunkte mit j .

Der folgende Satz 24 zeigt, dass ein Zusammenhang zwischen Maßen und Stern-Produkt nicht nur bei der Orthogonalität besteht.

Satz 24 :

1. $Q_1 = (x_1; y_1; 1)^H$ und $Q_2 = (x_2; y_2; 1)^H$ seien zwei H-Punkte auf der H-Geraden g mit den Enden $Q_3 = (x_3; y_3; 1)^\bullet$ und $Q_4 = (x_4; y_4; 1)^\bullet$, die in dieser Reihenfolge die Orientierung festlegen. Die zugehörigen Tripel seien mit \overline{v}_i mit $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ abgekürzt. Dann ist der signierte H-Abstand von Q_1 zu Q_2 gleich

$$0,5 \cdot \ln \frac{(\overline{v}_2 * \overline{v}_3) \cdot (\overline{v}_1 * \overline{v}_4)}{(\overline{v}_2 * \overline{v}_4) \cdot (\overline{v}_1 * \overline{v}_3)}.$$

2. $Q_1 = (x_1; y_1; 1)^H$ und $Q_2 = (x_2; y_2; 1)^H$ seien zwei H-Punkte und $\lambda = \frac{(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 - 1)^2}{(x_1^2 + y_1^2 - 1) \cdot (x_2^2 + y_2^2 - 1)}$. Dann ist $\lambda \geq 1$ und der (unsignierte) Abstand δ von Q_1

und Q_2 ist gleich $\ln(\sqrt{\lambda-1} + \sqrt{\lambda})$. Daraus folgt $\lambda = (\cosh(\delta))^2$.

3. $g = [a; b; d]^H$ sei eine H-Gerade, $Q = (x; y; 1)^H$ ein H-Punkt und $\overline{\lambda} = \frac{(a \cdot x + b \cdot y + d)^2}{(a^2 + b^2 - d^2) \cdot (x^2 + y^2 - 1)}$. Dann ist $\overline{\lambda} \leq 0$ und der (unsignierte) Abstand $\overline{\delta}$ von

Q und g ist gleich $\ln(\sqrt{1-\overline{\lambda}} + \sqrt{-\overline{\lambda}})$. Daraus folgt $\overline{\lambda} = -(\sinh(\overline{\delta}))^2$.

4. $g_1 = [a_1; b_1; d_1]^H$ und $g_2 = [a_2; b_2; d_2]^H$ seien zwei H-Geraden mit einem gemeinsamen H-Lot und $\lambda = \frac{(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 - d_1 \cdot d_2)^2}{(a_1^2 + b_1^2 - d_1^2) \cdot (a_2^2 + b_2^2 - d_2^2)}$. Dann ist $\lambda \geq 1$ und der (unsignierte)

Abstand von g_1 und g_2 ist gleich $\ln(\sqrt{\lambda-1} + \sqrt{\lambda})$.

5. $g_1 = [a_1; b_1; d_1]^H$ und $g_2 = [a_2; b_2; d_2]^H$ seien zwei verschiedene H-Geraden mit dem H-Schnittpunkt Q_0 . Die zugehörigen Tripel seien mit \overline{v}_1 und \overline{v}_2 abgekürzt, und es sei $\overline{v}_0 := (a_1; b_1; d_1) \times (a_2; b_2; d_2)$. Dann gilt für die H-Größe α des Winkels $\angle(g_1, g_2)$:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{v}_1 * \overline{v}_2}{\sqrt{(\overline{v}_1 * \overline{v}_1) \cdot (\overline{v}_2 * \overline{v}_2)}} \quad \text{und} \quad \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{-\overline{v}_0 * \overline{v}_0} \cdot \text{sign}(a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)}{\sqrt{(\overline{v}_1 * \overline{v}_1) \cdot (\overline{v}_2 * \overline{v}_2)}}, \quad \text{wobei}$$

$\text{sign}(a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)$ gleich 1 ist oder -1 , je nachdem $a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$ größer oder kleiner als Null ist.

Beweis: 1. Es sei zunächst Q_1 der Scheitelpunkt von g , also $(x_1; y_1) = 0,5 \cdot (x_3 + x_4; y_3 + y_4)$. Da Q_2 auf g liegt, gibt es ein $t \in \mathbf{R}$ mit

$(x_2; y_2) = (x_1; y_1) + t \cdot ((x_4; y_4) - (x_1; y_1)) = (x_1; y_1) + t \cdot 0,5 \cdot (x_4 - x_3; y_4 - y_3) =$
 $0,5 \cdot ((1+t) \cdot x_4 + (1-t) \cdot x_3; (1+t) \cdot y_4 + (1-t) \cdot y_3)$. Dabei ist der Parameter t proportional zum
signierten Abstand vom Scheitelpunkt nach Q_2 . Darum ist der signierte Abstand vom
Scheitelpunkt Q_1 zu Q_2 gleich $0,5 \cdot \ln \frac{1+t}{1-t}$.

$$\frac{(\overline{v_2 * v_3})}{(\overline{v_2 * v_4})} = \frac{0,5 \cdot ((1+t) \cdot x_4 + (1-t) \cdot x_3) \cdot x_3 + 0,5 \cdot ((1+t) \cdot y_4 + (1-t) \cdot y_3) \cdot y_3 - 1}{0,5 \cdot ((1+t) \cdot x_4 + (1-t) \cdot x_3) \cdot x_4 + 0,5 \cdot ((1+t) \cdot y_4 + (1-t) \cdot y_3) \cdot y_4 - 1} =$$

$$\frac{(1+t) \cdot 0,5 \cdot (x_4 \cdot x_3 + y_4 \cdot y_3 - 1)}{(1-t) \cdot 0,5 \cdot (x_4 \cdot x_3 + y_4 \cdot y_3 - 1)} = \frac{1+t}{1-t}, \text{ da } x_3^2 + y_3^2 = 1 \text{ und } x_4^2 + y_4^2 = 1.$$

Da sich für einen anderen Punkt Q_1 der signierte Abstand von Q_1 zu Q_2 durch die Differenz der signierten Abstände vom Scheitelpunkt ergeben, ist damit die 1. Behauptung gezeigt.

2. $|x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1|$ ist der Flächeninhalt des von den Vektoren $(x_1; y_1)$ und $(x_2; y_2)$ aufgespannten Parallelogramms. Wenn e den Abstand des Ursprungs von der Geraden Q_1Q_2 bezeichnet, dann ist $0 \leq |Q_1Q_2|^2 \cdot (1 - e^2) = |Q_1Q_2|^2 - (|Q_1Q_2| \cdot e)^2 =$
 $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1)^2 = (x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 - 1)^2 - (x_1^2 + y_1^2 - 1) \cdot (x_2^2 + y_2^2 - 1)$.
Darum ist $\lambda \geq 1$.

Die Tangentialebene an die Halbkugel im Punkt Q_1 hat die Gleichung

$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 - 1 + z \cdot \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2} = 0$ und die x - y -Ebene die Gleichung $z = 0$. Diese beiden Ebenen schneiden sich in der Geraden $g: x \cdot x_1 + y \cdot y_1 - 1 = 0$ in der x - y -Ebene. Nach Satz 21

liegt jeder Kreis mit dem H-Zentrum Q_1 in einer Ebene durch g (Siehe Abb. 20). Zu jeder Ebene durch g , die die Halbkugel trifft, gibt es ein $\lambda \geq 1$

mit $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 - 1 + \sqrt{\lambda} \cdot z \cdot \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2} = 0$ Für $\lambda = 1$ ergibt sich die Tangentialebene durch Q_1 und für λ gegen Unendlich nähert sich die Ebene der x - y -Ebene. Die Auflösung nach z und Einsetzung in die Kugelgleichung $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ ergibt die Gleichung des Schnittkreises auf der Kugel, nämlich $\lambda \cdot (x_1^2 + y_1^2 - 1) \cdot (x^2 + y^2 - 1) - (x_1 \cdot x + y_1 \cdot y - 1)^2 = 0$.

Alle Punkte des Kreises haben den gleichen H-Abstand r von Q_1 . Zur Berechnung von r benutzen wir die Schnittpunkte des Kreises mit der Geraden h , zu der Q_1 der Scheitelpunkt ist,

nämlich der Geraden mit der Parametergleichung $\vec{p}(t) = (x_1; y_1) + t \cdot (-y_1; x_1) \cdot \sqrt{\frac{1 - x_1^2 - y_1^2}{x_1^2 + y_1^2}}$ in

der x - y -Ebene. Für $t = 1$ ergibt sich ein Grenzpunkt von h . Um den Parameterwert für einen Schnittpunkt mit dem Kreis zu bestimmen, ergibt die Einsetzung in die Kreisgleichung

$(x_1^2 + y_1^2 - 1) \cdot (t^2 \cdot \lambda - \lambda + 1) = 0$ mit einer Lösung $t = \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda}}$. Der H-Abstand des zugehörigen

Schnittpunktes von h mit dem Kugelkreis ist folglich

$r = 0,5 \cdot \ln \frac{1+t}{1-t} = 0,5 \cdot \ln \left(\sqrt{\lambda - 1} + \sqrt{\lambda} \right)^2 = \ln \left(\sqrt{\lambda - 1} + \sqrt{\lambda} \right)$. Wenn Q_2 auf dem Kreis liegt, hat

λ den in der Behauptung angegebenen Wert und r ist dann der H-Abstand δ von Q_1 und Q_2 .

Aus $\delta = \ln(\sqrt{\lambda-1} + \sqrt{\lambda})$ folgt $e^\delta = \sqrt{\lambda-1} + \sqrt{\lambda}$,

$$e^{-\delta} = \frac{\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda-1}}{(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda-1}) \cdot (\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda-1})} = \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda-1} \text{ und daraus}$$

$$\lambda = \left(0,5 \cdot (e^\delta + e^{-\delta})\right)^2 = (\cosh(\delta))^2.$$

3. Wegen $a^2 + b^2 - d^2 \geq 0$ und $x^2 + y^2 - 1 \leq 0$ ist $\bar{\lambda} \leq 0$.

Nach Satz 21 ist jede H-Abstandskurve ein Kugelkreisbogen, der sich als Schnittkurve der Halbkugel mit einer Ebene $a \cdot x + b \cdot y + d + c \cdot z = 0$ mit $c \neq 0$ durch die Enden von g ergibt. Es

folgt $z = -\frac{a \cdot x + b \cdot y + d}{c}$. Wegen $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ folgt

$c^2 \cdot (x^2 + y^2 - 1) + (a \cdot x + b \cdot y + d)^2 = 0$. Für $c = \sqrt{-\bar{\lambda}} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 - d^2}$ ergibt sich für die Abstandskurve die Gleichung $(a \cdot x + b \cdot y + d)^2 - \bar{\lambda} \cdot (a^2 + b^2 - d^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0$, auf der Q liegt. Diese Gleichung beschreibt die Vereinigung zweier Abstandskurven zum gleichen Abstandsbetrag.

Zum Nachweis, dass der zugehörige Abstand durch $\ln(\sqrt{1-\bar{\lambda}} + \sqrt{-\bar{\lambda}})$ gegeben ist, betrachten

wir einen Schnittpunkt S der Abstandskurve mit der H-Geraden $[-b ; a ; 0]^H$, die g im Scheitelpunkt R orthogonal schneidet. Dazu benutzen wir die Parametergleichung $\vec{p}(t) = t \cdot (a; b)$ in der x - y -Ebene. Die Einsetzung in die Gleichung der Abstandskurve ergibt $(t \cdot a^2 + t \cdot b^2 + d)^2 - \bar{\lambda} \cdot (a^2 + b^2 - d^2)(t^2 \cdot (x^2 + y^2) - 1) = 0$. Zur Vereinfachung normieren wir die Geradengleichung, indem wir $a^2 + b^2 = 1$ voraussetzen, so dass $-d$ den euklidischen Abstand der Ebene von g zum Ursprung angibt, falls der Vektor $(a ; b ; 0)$ zu dieser Ebene hinzeigt. Dann ergibt sich die Gleichung $t^2 \cdot (1 + \bar{\lambda} \cdot (d^2 - 1)) + 2 \cdot d \cdot t + d^2 \cdot (1 - \bar{\lambda}) + \bar{\lambda} = 0$ (*).

Eine Lösung ist $t = \frac{d - \sqrt{-\bar{\lambda}} \cdot \sqrt{1-\bar{\lambda}} \cdot (1-d^2)}{-d^2 \cdot \bar{\lambda} + \bar{\lambda} - 1}$. Der H-Abstand des H-Punktes S von H-Punkt

$$[0 ; 0 ; 1]^H \text{ ist } 0,5 \cdot \ln \frac{1+t}{1-t} = 0,5 \cdot \ln \frac{(1-d) \cdot (\sqrt{-\bar{\lambda}} \cdot (d+1) \cdot \sqrt{1-\bar{\lambda}} + \bar{\lambda} \cdot (d+1) - 1)}{(1+d) \cdot (\sqrt{-\bar{\lambda}} \cdot (d-1) \cdot \sqrt{1-\bar{\lambda}} - \bar{\lambda} \cdot (d-1) - 1)}.$$
 Durch

Multiplikation von $(\sqrt{-\bar{\lambda}} \cdot (d+1) \cdot \sqrt{1-\bar{\lambda}} + \bar{\lambda} \cdot (d+1) - 1)$ im Zähler und Nenner ergibt sich der

H-Abstand $0,5 \cdot \ln \left(\frac{1-d}{1+d} \cdot \left(\sqrt{1-\bar{\lambda}} + \sqrt{-\bar{\lambda}} \right)^2 \right)$. Da der H-Abstand des H-Punktes R von

$[0 ; 0 ; 1]^H$ gleich $\frac{1+d}{1-d}$ ist, folgt für den H-Abstand von R und S der behauptete Term

$$\ln(\sqrt{1-\bar{\lambda}} + \sqrt{-\bar{\lambda}}).$$

Bei einer zweiten Lösung von der Gleichung (*) ergibt sich der gleiche Term.

Aus $\bar{\delta} = \ln(\sqrt{1-\bar{\lambda}} + \sqrt{-\bar{\lambda}})$ folgt $e^{\bar{\delta}} = \sqrt{1-\bar{\lambda}} + \sqrt{-\bar{\lambda}}$, $e^{-\bar{\delta}} = \sqrt{1-\bar{\lambda}} - \sqrt{-\bar{\lambda}}$ und daraus

$$\lambda = -\left(0,5 \cdot (e^{\bar{\delta}} - e^{-\bar{\delta}})\right)^2 = -(\sinh(\bar{\delta}))^2.$$

4. Nach Satz 23 ist $\lambda \geq 1$. Es sei Q der Schnittpunkt des gemeinsamen H-Lots j mit g_2 . Wir kürzen die Tripel von g_1 und g_2 mit \vec{v}_1 und \vec{v}_2 ab. Dann ist nach Satz 23 j durch das Tripel $\overline{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2}$ gegeben und Q durch $\vec{v}_Q = \vec{v}_2 \times (\overline{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2})$.

Da g_2 orthogonal zu j ist, gilt $\vec{v}_2 * (\overline{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2}) = 0$. Nach Hilfssatz 5 ist darum

$$\begin{aligned} \vec{v}_Q * \vec{v}_Q &= -(\vec{v}_2 * \vec{v}_2) \cdot \left((\overline{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2}) * (\overline{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2}) \right) = -(\vec{v}_2 * \vec{v}_2) \cdot \left((\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) * (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \right) = \\ &= (\vec{v}_2 * \vec{v}_2) \cdot \left(-(\vec{v}_1 * \vec{v}_1) \cdot (\vec{v}_2 * \vec{v}_2) + (\vec{v}_1 * \vec{v}_2)^2 \right) \text{ und} \\ \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_Q &= \vec{v}_1 \cdot \left(\vec{v}_2 \times (\overline{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2}) \right) = (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) * (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2). \end{aligned}$$

Darum folgt mit dem $\bar{\lambda}$ der 3. Behauptung

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &:= \frac{(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_Q)^2}{(\vec{v}_1 * \vec{v}_1)(\vec{v}_Q * \vec{v}_Q)} = \frac{\left((\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) * (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \right)^2}{-(\vec{v}_1 * \vec{v}_1) \cdot (\vec{v}_2 * \vec{v}_2) \cdot \left((\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) * (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \right)} = \frac{(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) * (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)}{-(\vec{v}_1 * \vec{v}_1) \cdot (\vec{v}_2 * \vec{v}_2)} = \\ &= \frac{-(\vec{v}_1 * \vec{v}_1) \cdot (\vec{v}_2 * \vec{v}_2) + (\vec{v}_1 * \vec{v}_2)^2}{-(\vec{v}_1 * \vec{v}_1) \cdot (\vec{v}_2 * \vec{v}_2)} = 1 - \frac{(\vec{v}_1 * \vec{v}_2)^2}{(\vec{v}_1 * \vec{v}_1) \cdot (\vec{v}_2 * \vec{v}_2)} = 1 - \lambda \end{aligned}$$

und der gesuchte Abstand $\ln(\sqrt{1-\bar{\lambda}} + \sqrt{-\bar{\lambda}}) = \ln(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda-1})$.

5. Die kartesischen Koordinaten von Q_0 sind $(x_Q; y_Q) = \left(\frac{b_1 \cdot d_2 - b_2 \cdot d_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}; \frac{-a_1 \cdot d_2 + a_2 \cdot d_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1} \right)$. Für

die Matrix der ersten Komponente der Maß-Form bei Q_0 ergibt sich mit $\lambda = \frac{1}{1 - x_Q^2 - y_Q^2}$:

$\lambda^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 - y_Q^2 & x_Q \cdot y_Q \\ x_Q \cdot y_Q & 1 - x_Q^2 \end{pmatrix}$. Die Vektoren $(b_1; -a_1)$ und $(b_2; -a_2)$ stehen euklidisch senkrecht zu

den Normalenvektoren von g_1 und g_2 , darum ist α die Größe des dadurch gebildeten Winkels. Man errechnet

$$(b_1; -a_1) \begin{pmatrix} 1 - y_Q^2 & x_Q \cdot y_Q \\ x_Q \cdot y_Q & 1 - x_Q^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 \\ -a_2 \end{pmatrix} =$$

$$b_1 \cdot b_2 + a_1 \cdot a_2 - y_Q^2 \cdot b_1 \cdot b_2 + x_Q \cdot y_Q \cdot (-b_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2) - x_Q^2 \cdot a_1 \cdot a_2 =$$

$$b_1 \cdot b_2 + a_1 \cdot a_2 - \left(\frac{-a_1 \cdot d_2 + a_2 \cdot d_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1} \right)^2 \cdot b_1 \cdot b_2 +$$

$$\frac{b_1 \cdot d_2 - b_2 \cdot d_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1} \cdot \frac{-a_1 \cdot d_2 + a_2 \cdot d_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1} \cdot (-b_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2) - \left(\frac{b_1 \cdot d_2 - b_2 \cdot d_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1} \right)^2 \cdot a_1 \cdot a_2 =$$

$$a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 - d_1 \cdot d_2 = \vec{v}_1 * \vec{v}_2.$$

Daraus folgt $\|(b_1; -a_1)\|^H = \lambda \cdot \sqrt{\vec{v}_1 * \vec{v}_1}$ und $\cos(\alpha) = \frac{\vec{v}_1 * \vec{v}_2}{\sqrt{(\vec{v}_1 * \vec{v}_1) \cdot (\vec{v}_2 * \vec{v}_2)}}$.

Die Matrix der 2. Komponente der Maß-Form ist $(\sqrt{\lambda})^3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Darum ist

$$\lambda \cdot \sqrt{\overline{v_1} * \overline{v_1}} \cdot \lambda \cdot \sqrt{\overline{v_2} * \overline{v_2}} \cdot \sin(\alpha) = (\sqrt{\lambda})^3 \cdot (b_1; -a_1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 \\ -a_2 \end{pmatrix} = (\sqrt{\lambda})^3 \cdot (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1).$$

Wegen $\frac{1}{\lambda} = 1 - x_Q^2 - y_Q^2 = \frac{-\overline{v_0} * \overline{v_0}}{(a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)^2}$ folgt daraus

$$\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{-\overline{v_0} * \overline{v_0}} \cdot \text{sign}(a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)}{\sqrt{(\overline{v_1} * \overline{v_1}) \cdot (\overline{v_2} * \overline{v_2})}}. \quad \square$$

Wir wenden die zweite Behauptung von Satz 24 auf ein H-rechtwinkliges Dreieit mit den Eckpunkten Q_0, Q_1 und Q_2 an mit H-rechtem Winkel bei Q_0 . $\overline{v_0}, \overline{v_1}$ und $\overline{v_2}$ seien

zugehörige Tripel und $\delta_{ik} := \|Q_i Q_k\|^H$. Dann ist $(\cosh(\delta_{ik}))^2 = \frac{(\overline{v_i} * \overline{v_k})^2}{(\overline{v_i} * \overline{v_i}) \cdot (\overline{v_k} * \overline{v_k})}$ für

$i, k \in \{0; 1; 2\}$, also $(\cosh(\delta_{01}))^2 \cdot (\cosh(\delta_{02}))^2 = \frac{(\overline{v_0} * \overline{v_1})^2 \cdot (\overline{v_0} * \overline{v_2})^2}{(\overline{v_0} * \overline{v_0}) \cdot (\overline{v_1} * \overline{v_1}) \cdot (\overline{v_0} * \overline{v_0}) \cdot (\overline{v_2} * \overline{v_2})}$. Nach

Hilfssatz 5 ist $0 = (\overline{v_0} \times \overline{v_1}) * (\overline{v_0} \times \overline{v_2}) = -(\overline{v_0} * \overline{v_0}) \cdot (\overline{v_1} * \overline{v_2}) + (\overline{v_0} * \overline{v_1}) \cdot (\overline{v_0} * \overline{v_2})$. Darum folgt $(\cosh(\delta_{01}))^2 \cdot (\cosh(\delta_{02}))^2 = (\cosh(\delta_{12}))^2$, also $(\cosh(\delta_{01})) \cdot (\cosh(\delta_{02})) = (\cosh(\delta_{12}))$.

20. Pole

Um im Folgenden eine Sonderbehandlung des Nordpols der Halbkugel zu vermeiden, erweitern wir die x-y-Ebene um unendlich ferne Punkte zu einer projektiven Ebene. Ein unendlich ferner Punkt wird durch die Richtung einer Geraden bestimmt, wobei hierbei Richtung und Gegenrichtung nicht unterschieden werden. Wenn $a \cdot x + b \cdot y + d = 0$ eine Gleichung der Geraden g ist, dann ist $(a; b)$ ein Normalenvektor und ein Vektor $(x; y) \neq (0; 0)$ mit $a \cdot x + b \cdot y = 0$ zeigt in Richtung von g . Der dadurch bestimmt unendlich ferne Punkt

wird dann durch das Tripel $(x; y; 0)^*$ mit hochgestelltem Punkt beschrieben und als der einzige unendlich ferne Punkt auf g angesehen. Da der Vektor $(t \cdot x; t \cdot y)$ für $t \neq 0$ die gleiche Richtung anzeigt, bezeichnet $(t \cdot x; t \cdot y; 0)^*$ den gleichen unendlich fernen Punkt. Ein endlicher Punkte $(x; y)$ der affinen Ebene fügt sich dadurch in diese Bezeichnungsweise ein, dass man ihn durch $(x; y; 1)^*$ beschreibt und diese Tripel mit $(t \cdot x; t \cdot y; t)^*$ identifiziert, falls $t \neq 0$ ist. Der Punkt $(p; q; t)^*$ mit $t \neq 0$ stimmt in der projektiver Darstellung also mit dem

Punkt $\left(\frac{p}{t}; \frac{q}{t}; 1\right)$ überein, und er hat die affine Darstellung $\left(\frac{p}{t}; \frac{q}{t}\right)$, da sein x-Wert in der x-y-Ebene $\frac{p}{t}$ ist und sein y-Wert $\frac{q}{t}$.

Analog beschreibt man die Gerade mit der Gleichung $a \cdot x + b \cdot y + d = 0$ durch $[a; b; d]^*$, wobei $[t \cdot a; t \cdot b; t \cdot d]^*$ die gleiche Gerade sein soll, allerdings mit entgegengesetzter Orientierung, falls $t < 0$ ist. Die unendlich ferne Gerade, auf der alle unendlich fernen Punkte

liegen wird mit $[0; 0; 1]^*$ bezeichnet. Ein Punkt $(x; y; t)^*$ liegt genau dann auf einer Geraden $[a; b; d]^*$, wenn $a \cdot x + b \cdot y + d \cdot t = 0$, also $(x; y; t) \cdot (a; b; d) = 0$ ist. Wenn $(x_1; y_1; t_1)^*$ und $(x_2; y_2; t_2)^*$ verschiedene Punkte auf $[a; b; d]^*$ sind, dann liegt der Punkt $(x; y; t)^*$ genau dann ebenfalls darauf, wenn es Zahlen λ und μ gibt mit $(x; y; t) = \lambda \cdot (x_1; y_1; t_1) + \mu \cdot (x_2; y_2; t_2)$. Wenn $t = t_1 = t_2 = 1$ ist, dann folgt $\lambda + \mu = 1$ und $(x; y) = \lambda \cdot (x_1; y_1) + \mu \cdot (x_2; y_2)$, so dass $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ das Teilverhältnis angibt.

Durch dieses Verfahren wird der zweidimensionale affine Raum durch die Hinzunahme von unendlich fernen Punkten zu einem zweidimensionalen projektiven Raum, dessen Element mit Hilfe von Tripeln bestimmt werden. Für den dreidimensionalen affinen Raum geht man analog vor. Ein endlicher Punkt $(x; y; z)$ wird durch $(x; y; z; 1)^*$ angegeben, ein unendlicher durch $(x; y; z; 0)^*$, eine Ebene durch $[a; b; c; d]^*$, wobei die Multiplikation mit $t \neq 0$ keine Änderung bewirkt. Der Punkt $(x; y; z; t)^*$ liegt genau dann auf der Ebene $[a; b; c; d]^*$, wenn $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d \cdot t = 0$ ist.

Die für einen H-Punkt bzw. eine H-Gerade benutzte Bezeichnung $(x; y; t)^H$ bzw. $[a; b; d]^H$ passt insofern ins Bezeichnungssystem, als die Inzidenz ebenfalls durch $a \cdot x + b \cdot y + d \cdot t = 0$ beschrieben wird. $(x; y; t)^*$ mit $\left(\frac{x}{t}\right)^2 + \left(\frac{y}{t}\right)^2 < 1$ bezeichnet den Schattenpunkt von $(x; y; t)^H$.

Im Fall $\left(\frac{x}{t}\right)^2 + \left(\frac{y}{t}\right)^2 > 1$ ist $(x; y; t)^H$ nicht definiert, wohl aber $(x; y; t)^*$. Entsprechendes gilt für $[a; b; d]^*$ und $[a; b; d]^H$.

Zur Klärung des geometrischen Zusammenhangs zwischen Inzidenz und Orthogonalität in der hyperbolischen Geometrie ist die Pol-Polaren-Beziehung fundamental:

Definition : Unter dem Pol einer Geraden $[a; b; d]^*$ der projektiven x-y-Ebene bezüglich des Einheitskreises verstehen wir den Punkt $(a; b; -d)^*$ und unter der Polaren des Punktes $(x; y; t)^*$ die Gerade $[x; y; -t]^*$. Wir benutzen diese Bezeichnungen auch, falls der hochgestellte Punkt durch ein hochgestelltes H ersetzt wird.

Unter dem Pol einer Ebene $[a; b; c; d]^*$ des dreidimensionalen projektiven Raums bezüglich der Kugelfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ verstehen wir den Punkt $(a; b; c; -d)^*$ und unter der Polaren des Punktes $(x; y; z; t)^*$ die Gerade $[x; y; z; -t]^*$.

Der Pol der Geraden $[a; b; d]^*$ stimmt also mit dem der Ebene $[a; b; 0; d]^*$ überein.

Da H-Geraden $g_1 = [a_1; b_1; d_1]^H$ und $g_2 = [a_2; b_2; d_2]^H$ nach Satz 23 genau dann H-orthogonal sind, wenn $[a_1; b_1; d_1]^H * [a_2; b_2; d_2]^H = a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 - d_1 \cdot d_2 = 0$ gilt, ist dies äquivalent damit, dass der Pol von $[a_1; b_1; d_1]^*$ auf $[a_2; b_2; d_2]^*$ liegt.

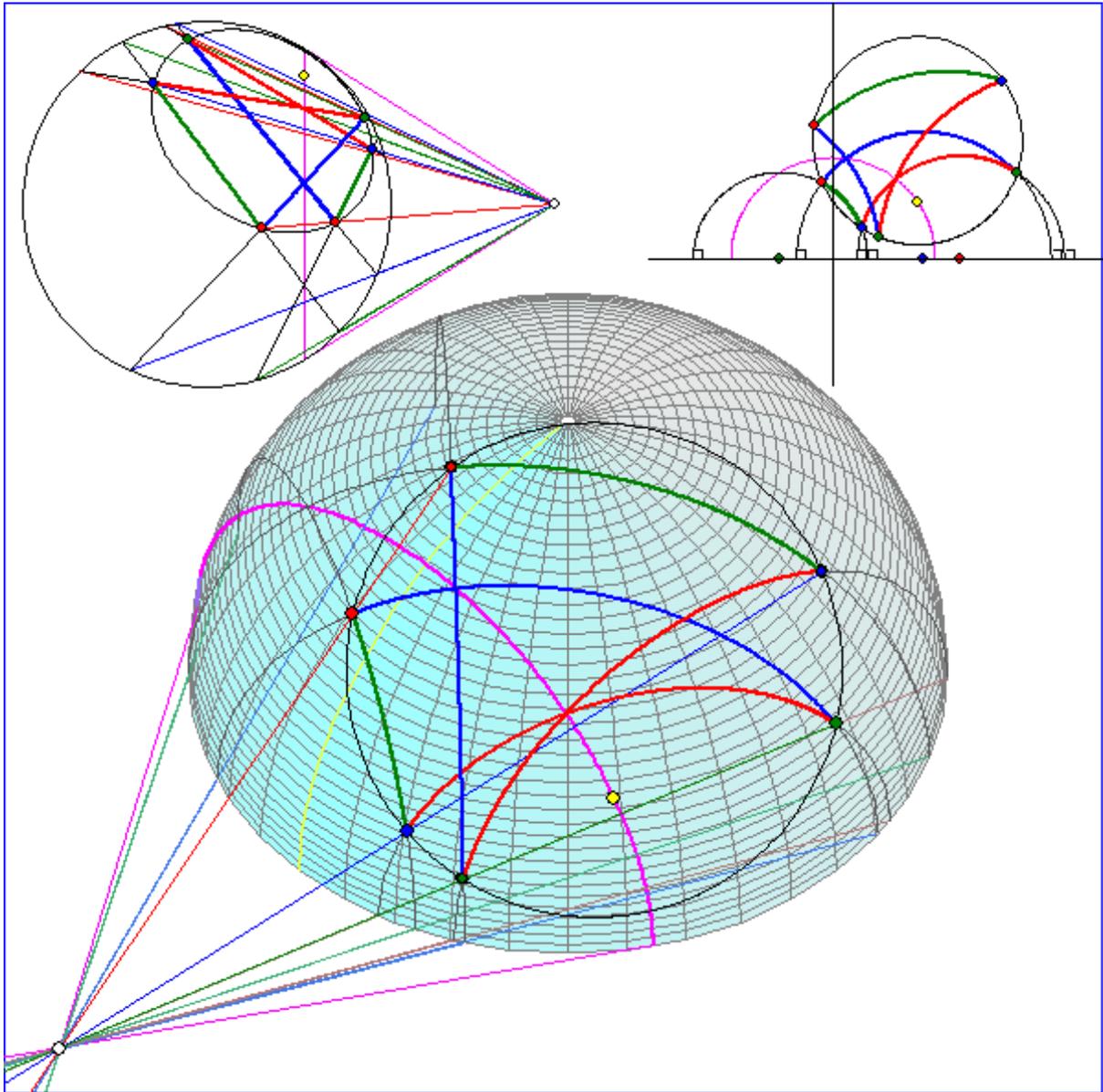


Abb. 22

Die Abbildung 22 zeigt eine magentafarbene H-Gerade g mit ihrem Pol, der sich als Schnittpunkt der magentafarbenen Tangenten in den Grenzpunkten ergibt. (Dies wird im folgenden Abschnitt gezeigt.) Die Eckpunkte A , B und C eines H-Dreiecks wurden mit dem Pol verbunden und die zweiten Schnittpunkt A' , B' und C' mit der Halbkugel bestimmt. Sie werden als Bilder der H-Spiegelung an g angesehen. Die euklidischen Verbindungsgeraden der Enden von entsprechenden H-Seitegeraden gehen alle durch den Pol von g .

Der weiß gefüllten H-Mittelpunkt des Umkreises von ABC ist hier Punkt von g . Darum liegen die Spiegelungspunkte A' , B' und C' ebenfalls auf dem Kreis. Der Pol von g liegt auf der Kreisebene.

Man sieht hieran, dass die Pol-Polaren-Beziehung eng mit Spiegelungen im Halbkugel-Modell zusammenhängt.

Um zu einer analytischen Beschreibung der H-Spiegelung zu gelangen, betrachten wir eine H-Gerade $g = [a, b; d]^H$ und ihren Pol Q . Q hat als Punkt der x - y -Ebene die projektive

Darstellung $(a; b; -d)^\bullet$ und die affine Darstellung $\left(-\frac{a}{d}; -\frac{b}{d}\right)$. Als Punkt des x-y-z-Raums hat

es die projektive Darstellung $(a; b; 0; -d)^\bullet$ und die affine Darstellung $\left(-\frac{a}{d}; -\frac{b}{d}; 0\right)$. Die

Gerade h durch Q und einen Punkt $R = (x; y; z)$ auf der Einheitskugelfläche hat die

Parameter-Darstellung $\vec{p}(u) = \left(-\frac{a}{d}; -\frac{b}{d}; 0\right) + u \cdot \left(x + \frac{a}{d}; y + \frac{b}{d}; z\right)$. Der zweite Schnittpunkt S

von h mit der Kugelfläche hat dann den Parameterwert

$$u = \frac{a^2 + b^2 - d^2}{2 \cdot a \cdot d \cdot x + 2 \cdot b \cdot d \cdot y + a^2 + b^2 + d^2}.$$

Daraus errechnet man, dass der Schattenpunkt von S der Punkt mit den projektiven Koordinaten

$$-(x, y, 1)^\bullet + 2 \cdot \frac{a \cdot x + b \cdot y + d}{a^2 + b^2 - d^2} \cdot (a, b, -d)^\bullet = -(x, y, 1)^\bullet + 2 \cdot \frac{(x, y, 1) * (a; b; -d)}{(a; b; d) * (a; b; d)} \cdot (a, b, -d)^\bullet \text{ ist.}$$

Dies liefert die Abbildungsvorschrift für die H-Spiegelung an g. Eine entsprechende Formel erhält man, wenn die Kugelfläche (2-Sphäre) durch eine 3-Sphäre ersetzt wird. Dazu definiert man das Stern-Produkt entsprechend wie im zweidimensionalen Fall durch

$$(a_1; b_1; c_1; d_1) * (a_2; b_2; c_2; d_2) := a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2 - d_1 \cdot d_2.$$

Im Folgenden wird gezeigt, dass die H-Spiegelung Inzidenz-, winkel-, abstands- und flächeinhalts-treu ist. Dabei wird häufig die Pol-Polaren-Beziehung benutzt, die für die projektive Ebene einen guten geometrischen Sinn hat, aber nicht in gleicher Weise für das Halbkugel-Modell, da den H-Geraden zwar wie in Abbildung 22 ein Pol in der x-y-Ebene zugeordnet werden kann, zu einem H-Punkt aber nicht so gut eine Polare. Dieses Problem tritt im Beltrami-Klein-Modell nicht in gleicher Weise auf, da die projektive Ebene eine natürliche Erweiterung des Beltrami-Klein-Modells ist.

21. Das Beltrami-Klein-Modell

Das Beltrami-Klein-Modell, häufig kurz Klein-Modell genannt, entsteht dadurch, dass die H-Punkte und H-Geraden parallel zur z-Achse auf die x-y-Ebene projiziert werden. Die zugehörige Projektionsabbildung bezeichnen wir mit Π .

Definition :

- Die Menge der ‚*Punkte*‘ P^K des Beltrami-Klein-Modells ist die Menge der Punkte $\{(x; y) \mid x, y \in \mathbf{R} \text{ mit } x^2 + y^2 < 1\}$. Wir benutzen für diese K-Punkte wie bei dem Halbkugel-Modell die an der projektiven Geometrie orientierte Bezeichnung $(x; y; 1)^K$ und identifizieren dieses Tripel mit jedem Tripel $(t \cdot x; t \cdot y; t)^K$ mit $t \neq 0$. Die Zahl $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ wird als Höhe eines K-Punktes $(x; y; 1)^K$ bezeichnet.
- Die Menge der ‚*Geraden*‘ G^K des Beltrami-Klein-Modells, K-Geraden genannt, ist die Menge der Sehnen des Einheitskreises, wobei die Endpunkte auf dem Kreis nicht zu den Sehnen gehören. Zu einem Tripel $(a; b; d)$ mit $(a; b; d) * (a; b; d) = a^2 + b^2 - d^2 > 0$ bezeichnen wir die Sehne

$\{(x; y) \mid x^2 + y^2 < 1 \text{ und } a \cdot x + b \cdot y + d = 0\}$ mit $[a; b; d]^K$. Ihre euklidische Mitte $(-a \cdot d; -b \cdot d; a^2 + b^2)^K$ wird als Scheitelpunkt von $[a; b; d]^K$ bezeichnet.

- Die Größe des Winkels zwischen zwei K-Geraden $[a_1; b_1; d_1]^K$ und $[a_2; b_2; d_2]^K$ stimmt mit der zwischen den H-Geraden $[a_1; b_1; d_1]^H$ und $[a_2; b_2; d_2]^H$ überein.
- Der signierte Abstand von einem K-Punkt $(x_1; y_1; 1)^K$ zu einem K-Punkt $(x_2; y_2; 1)^K$ stimmt mit dem vom H-Punkt $(x_1; y_1; 1)^H$ zum H-Punkt $(x_2; y_2; 1)^H$ überein.
- Auch die Maß-Form μ_Q^K übernehmen wir aus dem Halbkugel-Modell: Es seien $(x'_1; y'_1)$ und $(x'_2; y'_2)$ Tangentenvektoren beim K-Punkt Q in kartesischen Koordinaten des \mathbf{R}^2 mit den K-Längen $\|(x'_1; y'_1)\|^K$ und $\|(x'_2; y'_2)\|^K$, die einen Winkel mit der K-Größe α einschließen. Dann ist die erste Komponente $\|(x'_1; y'_1)\|^K \cdot \|(x'_2; y'_2)\|^K \cdot \cos(\alpha)$

der Maß-Form μ_Q^K durch $(x'_1; y'_1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1-y_Q^2}{(1-x_Q^2-y_Q^2)^2} & \frac{x_Q \cdot y_Q}{(1-x_Q^2-y_Q^2)^2} \\ \frac{x_Q \cdot y_Q}{(1-x_Q^2-y_Q^2)^2} & \frac{1-x_Q^2}{(1-x_Q^2-y_Q^2)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix}$ gegeben und

die zweite Komponente $\|(x'_1; y'_1)\|^K \cdot \|(x'_2; y'_2)\|^K \cdot \sin(\alpha)$ durch

$$(x'_1; y'_1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{(\sqrt{1-x_Q^2-y_Q^2})^3} \\ \frac{-1}{(\sqrt{1-x_Q^2-y_Q^2})^3} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix}$$

Auf Grund dieser Definition kann man die Aussagen von Satz 23 und Satz 24 auf das Beltrami-Klein-Modell übertragen, indem man das Wort ‚Halbkugel-Modell‘ durch ‚Beltrami-Klein-Modell‘ und jedes hochgestellte H durch K ersetzt.

Satz 25 (Abb. 23): Z sei der Punkt $(0; 0; -1)$ im \mathbf{R}^3 und Λ die Abbildung von der Kugelfläche um den Ursprung $(0; 0; 0)$ mit dem Radius 1 in die x-y-Ebene, die einem Punkt $Q(x; y; z)$ der Kugelfläche den Schnittpunkt der Geraden QZ mit der x-y-Ebene zuordnet. Dann gilt:

1. $\Lambda((x; y; z)) = \left(\frac{x}{1+z}; \frac{y}{1+z}; 0 \right)$ für alle $x, y, z \in \mathbf{R}$ mit $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
2. Λ bildet Kreise in der Kugelfläche auf Kreise und Geraden in der x-y-Ebene ab.
3. Wenn sich zwei Kurven in der Kugeloberfläche unter einem Winkel der Größe α schneiden, dann schneiden sich die Bildkurven bei Λ unter einem Winkel mit der gleichen Größe α .

Beweis : Die Abbildung Λ entspricht der Abbildung Σ^{-1} in Satz 19 mit dem Unterschied, dass das Projektionszentrum Z nicht auf der x-Achse, sondern der z-Achse liegt.

1. folgt aus der Gleichung $(0;0;-1) + \frac{1}{1+z} \cdot (x; y; 1+z) = \left(\frac{y}{1+z}; \frac{z}{1+z}; 0 \right)$. 2. und 3. ergeben

sich aus Satz 19 unter Berücksichtigung der Ergänzung dazu. \square

Die Abbildung Λ zeigt neben der Projektion parallel zur z-Achse eine andere Möglichkeit, von dem Halbkugel-Modell zu einem weiteren Modell der hyperbolischen Geometrie in der x-y-Ebene zu gelangen. Dieses Modell wird auch als ‚Poincaresches Kreis-Modell‘ bezeichnet im Unterschied zum ‚Poincareschen Halbebenen-Modell‘, das wir kurz Poincare-Modell genannt haben.

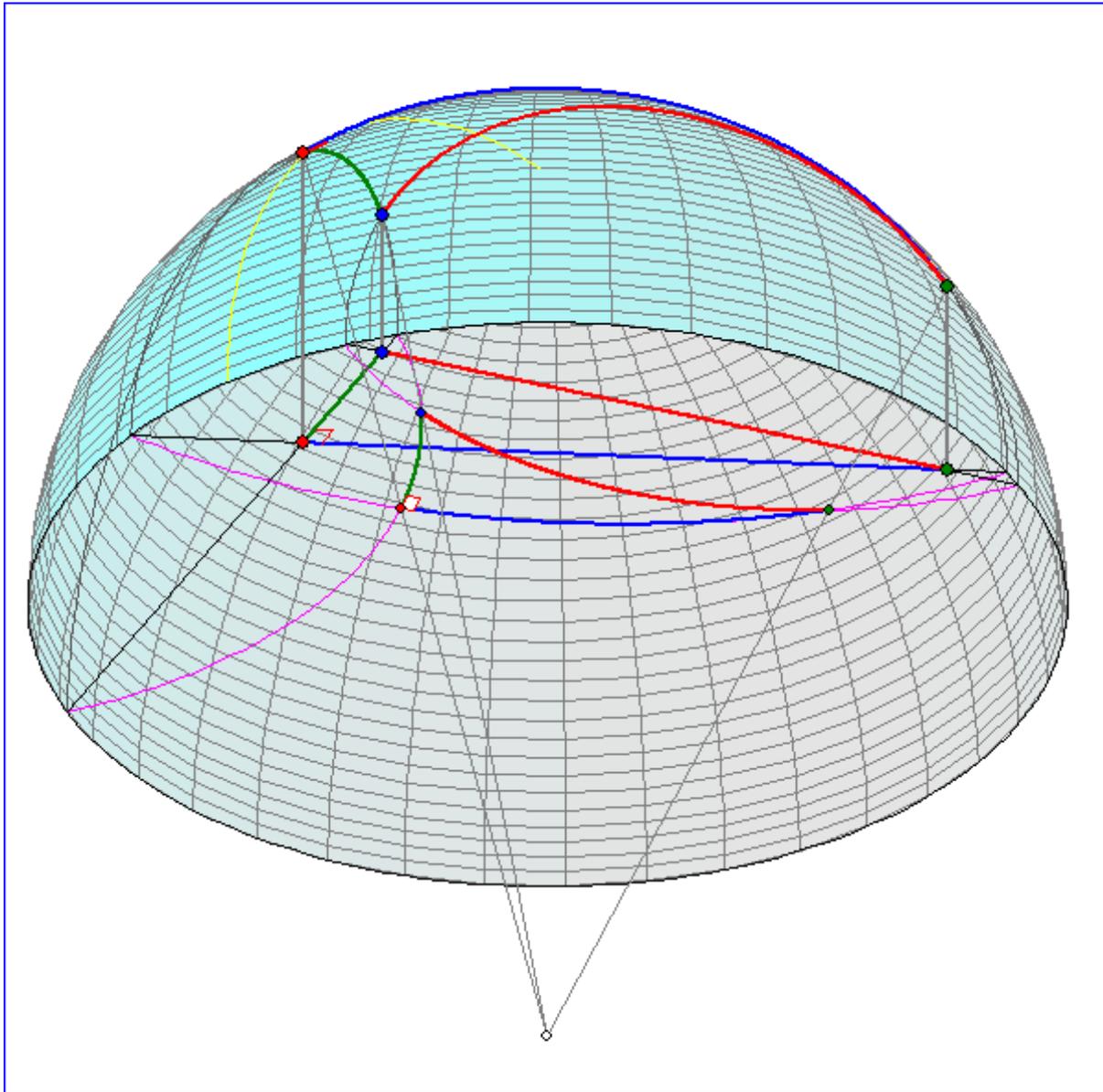


Abb. 23

In Abbildung 23 wird die Wirkung von Λ auf die H-Punkte **A**, **B** und **C** dargestellt, die Eckpunkte eines H-Dreiecks mit einem euklidisch rechten Winkel bei **A** sind. Die Projektion parallel zur z-Achse ergibt das Dreieck **A'B'C'** aus K-Punkten in einem K-Dreieck mit euklidisch geraden Strecken. Der Winkel bei **A'** hat in der Geometrie des Beltrami-Klein-Modells die Größe 90° , ist aber kein euklidisch rechter Winkel. Die stereographische Projektion Λ mit dem Zentrum $Z(0; 0; -1)$ bildet **A**, **B** und **C** auf ein Dreieck **A''B''C''** ab,

dessen Seiten Kreisbögen zu Kreisen sind, die senkrecht auf dem Einheitskreis in der x-y-Ebene stehen. Diese Kreisbögen bilden bei A'' einen euklidisch rechten Winkel. Alle drei Winkel des K-Dreieits $A'B'C'$ kann man bestimmen, indem man die euklidischen Winkelgrößen in dem Dreieit $A''B''C''$ misst.

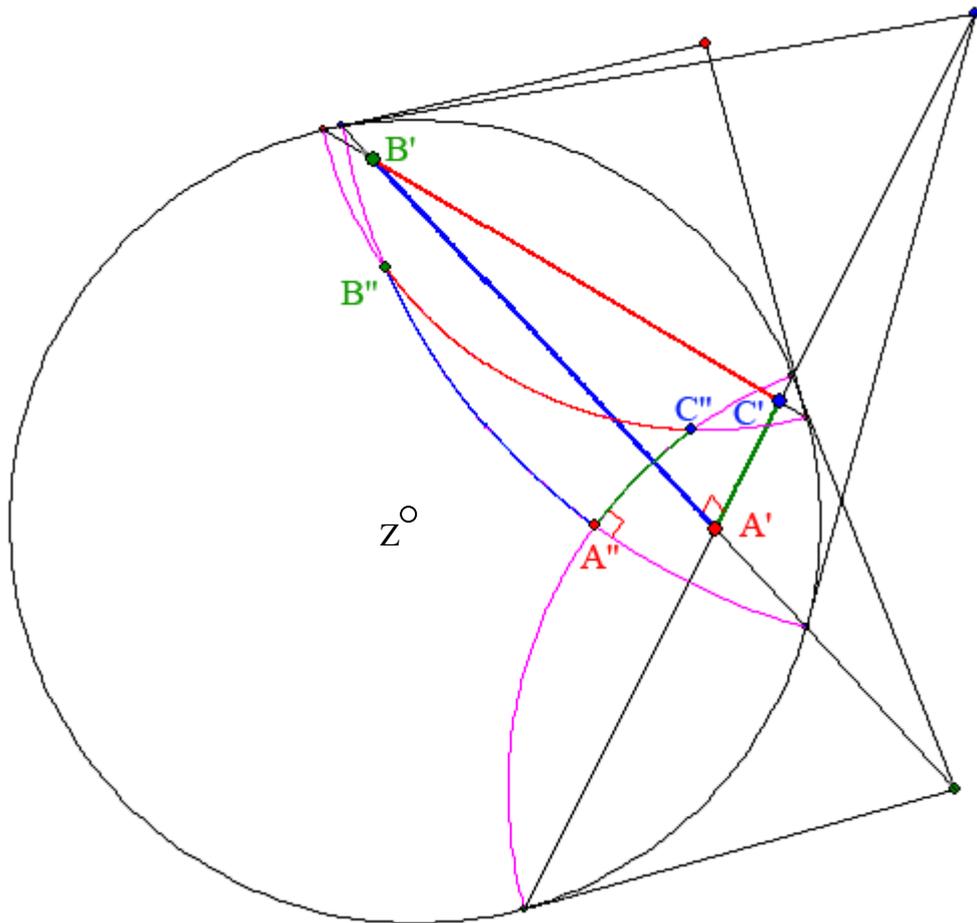


Abb. 24

Abbildung 24 zeigt, wie man das Dreieit $A''B''C''$ in der Zeichenebene konstruieren kann: Man verlängert jede Seite des K-Dreieits $A'B'C'$ euklidisch geradlinig bis zum Einheitskreis und macht den Schnittpunkt der Tangenten in den Enden zum Mittelpunkte des zu der Seite gehörenden Kreisbögen von $A''B''C''$. Dieser Schnittpunkt ist der Pol der euklidischen Seitengerade. Abbildung 24 zeigt, dass der Pol von $A'B'$ auf $A'C'$ liegt und der Pol von $A'C'$ auf $A'B'$. Wir untersuchen diesen Zusammenhang in Satz 26.

Im Folgenden werden nur Polaren und Pole bezüglich des Einheitskreises benutzt. Wir lassen darum diesen Zusatz auch weg.

Hilfssatz 7 klärt den Zusammenhang zwischen den Punkten A' und A'' in Abbildung 24.

Hilfssatz 7: $Q = (x_Q; y_Q; 1)^K$ sei ein K-Punkt und $f = \frac{1 - \sqrt{1 - x_Q^2 - y_Q^2}}{x_Q^2 + y_Q^2}$. Dann ist der K-Punkt

$M = (x_Q \cdot f; y_Q \cdot f; 1)^K$ der K-Mittelpunkt zwischen Q und dem Zentrum $Z = (0; 0; 1)^K$ des Einheitskreises. Wenn g und h zwei K-Geraden durch $Q \neq Z$ sind, dann ist M der Schnittpunkt der zugehörigen Kreisbögen durch die Enden von g bzw. h , die senkrecht auf dem Einheitskreis stehen.

Beweis : Es ist $\frac{(x_Q^2 \cdot f + y_Q^2 \cdot f - 1)^2}{(x_Q^2 + y_Q^2 - 1) \cdot (x_Q^2 \cdot f^2 + y_Q^2 \cdot f^2 - 1)} = \frac{1 - x_Q^2 - y_Q^2}{(x_Q^2 + y_Q^2 - 1) \cdot (x_Q^2 \cdot f^2 + y_Q^2 \cdot f^2 - 1)} =$
 $\frac{(0 \cdot f + 0 \cdot f - 1)^2}{(0 + 0 - 1) \cdot (x_Q^2 \cdot f^2 + y_Q^2 \cdot f^2 - 1)}$. Darum ist hat M nach Satz 24 von Q und von Z den gleichen

K-Abstand.

$[a_1; b_1; d_1]^K$ und $[a_2; b_2; d_2]^K$ seien zwei K-Geraden, die sich in $Q \neq Z$ schneiden. Dann ist

$x_Q = \frac{b_2 - b_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}$ und $y_Q = \frac{a_2 - a_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}$. Die Pole der Geraden sind die projektiven

Punkte $(a_i; b_i; -d_i)^* = \left(\frac{a_i}{-d_i}; \frac{b_i}{-d_i}; 1\right)^*$ mit der Potenz $\left(\frac{a_i}{-d_i}\right)^2 + \left(\frac{b_i}{-d_i}\right)^2 - 1$ bezüglich des

Einheitskreises. Die zu den Geraden gehörigen Kreisbögen gehören zu den Kreisen

$x^2 + 2 \cdot \frac{a_i}{d_i} \cdot x + y^2 + 2 \cdot \frac{b_i}{d_i} \cdot y + 1 = \left(x - \frac{a_i}{-d_i}\right)^2 + \left(y - \frac{b_i}{-d_i}\right)^2 - \left(\frac{a_i}{-d_i}\right)^2 - \left(\frac{b_i}{-d_i}\right)^2 + 1 = 0$. Für die

Schnittpunkte errechnet man dann $x = x_Q \cdot \frac{1 \pm \sqrt{1 - x_Q^2 - y_Q^2}}{x_Q^2 + y_Q^2}$ und $y = y_Q \cdot \frac{1 \pm \sqrt{1 - x_Q^2 - y_Q^2}}{x_Q^2 + y_Q^2}$,

wobei das Pluszeichen für den Schnittpunkt außerhalb des Einheitskreises gilt. \square

Definition. Zu einem K-Punkt Q nennen wir den K-Punkt M in Hilfssatz 7, Winkel-Maßpunkt zu Q'.

Zu einer K-Geraden g nennen wir die Strecke oder den Kreisbogen durch die Enden von g, die senkrecht auf dem Einheitskreis steht, auch dann (sprach-missbräuchlich) den 'zu g gehörigen Kreisbogen', wenn $Q = M = Z$ gilt, also g eine Strecke durch Z ist, die mit diesem 'Kreisbogen' übereinstimmt.

Satz 26: Gegeben sei eine Gerade $g = [a; b; d]^*$ mit dem Pol $G = (a, b; -d)^*$. Dann gilt:

1. g geht genau dann durch G, wenn G auf dem Einheitskreis liegt. Dies ist auch äquivalent damit, dass g Tangente an den Einheitskreis ist.
2. Ein Punkt R liegt genau dann auf g, wenn die Polare von R durch G geht..
3. G ist der Schnittpunkt der Polaren zweier beliebiger verschiedener Punkte auf g. g ist die Verbindungsgerade der Pole zweier beliebiger verschiedener Geraden durch G.
4. Wenn g den Einheitskreis in zwei Punkten E_1 und E_2 schneidet, dann ist G der Schnittpunkt der Tangenten in E_1 und E_2 , und umgekehrt.
5. $h \neq g$ sei eine Gerade durch G, welche den Einheitskreis in Punkten E_1 und E_2 mit $E_1 \neq E_2$ schneidet und g im Punkt H. Wenn dann H die Strecke $\overline{E_1 E_2}$ (euklidisch) im Verhältnis λ teilt, dann teilt G diese Strecke im Verhältnis $-\lambda$.

Beweis : 1. g geht genau dann durch G, wenn $a \cdot a + b \cdot b - d \cdot d = 0$ ist, also wenn

$\left(\frac{a}{-d}\right)^2 + \left(\frac{b}{-d}\right)^2 = 1$ gilt, d. h. G auf dem Einheitskreis liegt. g ist dann Tangente in G, da

$(a; b)$ Normalenvektor von g ist. Wenn g Tangente ist, dann ist der Abstand $\frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ vom

Ursprung gleich 1, also $a \cdot a + b \cdot b - d \cdot d = 0$, und umgekehrt.

2. Sei $R = (x; y; t)^*$. R liegt auf g genau dann, wenn $a \cdot x + b \cdot y + d \cdot t = 0$ ist. Dies ist äquivalent mit $a \cdot x + b \cdot y + (-d) \cdot (-t) = 0$, also damit, dass die Polare von R durch G geht.
3. folgt unmittelbar aus 2.
4. Wenn g den Einheitskreis in zwei Punkte E_1 und E_2 schneidet, dann gehen die Polaren von E_1 und E_2 durch G . Dies sind aber die Tangenten in E_1 und E_2 .
5. \vec{v}_1, \vec{v}_2 seien Tripel zu E_1, E_2 und $\vec{v}_G, \vec{v}_g, \vec{v}_H$ zu G, g, H mit dritter Komponente 1.

Dann gibt es Zahlen r_G, r_H, s_G, s_H mit $\vec{v}_G = r_G \cdot \vec{v}_1 + s_G \cdot \vec{v}_2$ und $\vec{v}_H = r_H \cdot \vec{v}_1 + s_H \cdot \vec{v}_2$, wobei

$$\frac{r_G}{s_G} \text{ und } \frac{r_H}{s_H} \text{ die Teilverhältnisse angeben, in denen die Strecke } \overline{E_1 E_2} \text{ geteilt wird. Es gilt}$$

$$\vec{v}_G * \vec{v}_H = \vec{v}_g \cdot \vec{v}_H = 0 \text{ und } \vec{v}_1 * \vec{v}_1 = 0 = \vec{v}_2 * \vec{v}_2, \text{ aber } \vec{v}_1 * \vec{v}_2 \neq 0, \text{ da sonst } \vec{v}_G * \vec{v}_G = 0 \text{ w\u00e4re.}$$

$$0 = \vec{v}_G * \vec{v}_H = (r_G \cdot \vec{v}_1 + s_G \cdot \vec{v}_2) * (r_H \cdot \vec{v}_1 + s_H \cdot \vec{v}_2) = r_G \cdot s_H \cdot (\vec{v}_1 * \vec{v}_2) + s_G \cdot r_H \cdot (\vec{v}_2 * \vec{v}_1) =$$

$$(r_G \cdot s_H + s_G \cdot r_H) \cdot (\vec{v}_1 * \vec{v}_2), \text{ also } r_G \cdot s_H + s_G \cdot r_H = 0 \text{ und } \frac{r_G}{s_G} = -\frac{r_H}{s_H}. \quad \square$$

Punkte G und H , f\u00fcr die das innere und das \u00e4u\u00dfere Teilverh\u00e4ltnis bez\u00fcglich $\overline{E_1 E_2}$ im Betrag gleich sind, werden ‚harmonisch bez\u00fcglich $\overline{E_1 E_2}$ ‘ genannt.

Um die Bedeutung der Definition des Beltrami-Klein-Modells f\u00fcr geometrische Konstruktionen auszuloten, sehen wir uns die Aufgaben an, die denen entsprechen, die bei der Untersuchung der Geometrie des Poincare-Modells gestellt wurden:

1. Finde zu zwei K-Punkten A und B eine K-Verbindungsgerade g .
2. Finde zu zwei K-Geraden g und h einen K-Schnittpunkt A .
3. Finde zu zwei K-Geraden g und h ein gemeinsames K-Lot j , d.h. eine P-Gerade, die sowohl zu g als auch zu h orthogonal ist.
4. Finde zu einem K-Punkt A und einer P-Geraden g ein K-Lot zu g durch A .
5. Finde zu einem K-Punkt A und einer K-Geraden g ein K-Gerade durch A , die zu g hyperbolisch parallel ist.

Die ersten beiden Aufgaben machen keine Schwierigkeiten. Zur dritten Aufgabe betrachten wir Geraden $g_1 = [a_1; b_1; d_1]^K$ und $g_2 = [a_2; b_2; d_2]^K$, die weder hyperbolisch parallel sind, noch einen K-Schnittpunkt haben. Wenn g_1 und g_2 euklidisch parallel sind, dann ist $g_0 = [-b_1; a_1; 0]^K$ eine gemeinsame K-Orthogonale. g_0 ist dann auch gemeinsame euklidische Orthogonale. Wenn g_1 und g_2 nicht euklidisch parallel sind, dann gibt es einen Schnittpunkt Q im \mathbf{R}^2 au\u00dfershalb des Einheitskreises. Die Polare von Q ist dann gemeinsames K-Lot von g_1 und g_2 . Zur L\u00f6sung der 4. Konstruktionsaufgabe verbindet man den Pol von g mit A . Bei der 5. Aufgabe verbindet man A mit einem Schnittpunkt von g mit dem Einheitskreis.

21. Spiegelungen im Beltrami-Klein-Modell

Analog wie beim Poincare-Modell definieren wir:

Definition : Eine Abbildung B der Punktmenge des Beltrami-Klein-Modells auf sich wird ‚K-Kongruenzabbildung‘ genannt, wenn gilt:

- Die Menge der Punkte, die auf einer K-Geraden g liegen, wird auf die Punktmenge einer K-Geraden abgebildet; wir bezeichnen diese mit gB . (Erhaltung der Inzidenz)
- Für alle K-Geraden g, h die einen K-Punkt gemeinsam haben oder hyperbolisch parallel sind, ist $\square(g, h) = \square(gB, hB)$, oder es gilt $\square(g, h) = \square(hB, gB)$ für alle derartige K-Geraden. Im ersten Fall heißt die Kongruenzabbildung ‚gerade‘ im zweiten ‚ungerade‘. (Winkeltreue)
- Für alle K-Punkte Q, R mit $QB = Q'$ und $RB = R'$ ist $\|\overline{QR}\|^K = \|\overline{Q'R'}\|^K$.
(Abstandstreue)

Unter der K-Spiegelung an einer K-Geraden g verstehen wir eine K-Kongruenzabbildung, die alle Punkte auf g festlässt, aber nicht alle Punkte des Beltrami-Klein-Modells. Die K-Spiegelung an einem K-Punkt Q ist die K-Kongruenzabbildung, die Q und alle Geraden durch Q festlässt, aber auf diesen Geraden nur den Punkt Q .

Auf Grund dieser Definition ist klar, dass es zu jeder K-Geraden und jedem K-Punkt höchstens eine Spiegelung geben kann, aber noch nicht sofort, dass es stets diese Spiegelungen gibt.

Im Folgenden definieren wir σ_g zunächst für beliebige Tripel des Vektorraums \mathbf{R}^3 , dann für beliebige Punkte der projektiven Ebene und damit auch für K-Punkte, und müssen dann zeigen, dass σ_g für das Beltrami-Klein-Modell eine K-Spiegelung bewirkt. Die Definition orientiert sich an den Überlegungen im Anschluss an Abbildung 22.

Definition : Zu einem Tripel $g = [a ; b ; d]$ mit $a^2 + b^2 - d^2 \neq 0$ sei die Abbildung σ_g bzw. σ'_g definiert durch

$$\sigma_g : (x; y; t) \rightarrow -(x; y; t) + 2 \cdot \frac{(x; y; t) * (a; b; -d)}{(a; b; -d) * (a; b; -d)} \cdot (a; b; -d) \text{ für Tripel in runden Klammern}$$

und

$$\sigma'_g : [p; q; s] \rightarrow -[p; q; s] + 2 \cdot \frac{(p; q; s) * (a; b; d)}{(a; b; d) * (a; b; d)} \cdot [a; b; d] \text{ für Tripel in eckigen Klammern.}$$

Wenn g eine projektive Gerade $[a; b; d]^*$ ist, dann sei $(x; y; t)^* \sigma_g$ bzw. $[p; q; s]^* \sigma'_g$ der Punkt mit dem Tripel $(x; y; t) \sigma_g$ bzw. die Gerade mit dem Tripel $[p; q; s] \sigma'_g$.

Diese Definition für projektive Punkte und Geraden ist möglich, weil $\sigma_{\lambda g} = \sigma_g$, $(\lambda \cdot x; \lambda \cdot y; \lambda \cdot t) \sigma_g = \lambda \cdot ((x; y; t) \sigma_g)$ und $[\lambda \cdot p; \lambda \cdot q; \lambda \cdot s] \sigma'_g = \lambda \cdot ([p; q; s] \sigma'_g)$ ist.

Die Definitionen für runde Klammern oder Punkte unterscheiden sich offenbar nur im Vorzeichen von d von der für eckige Klammern oder Geraden. Dies entspricht dem Übergang von einer Geraden zu ihrem Pol. Wenn man eckige und runde Klammern nicht unterscheidet, gilt $\sigma'_g = \sigma_{-g}$.

Definition : Ein Tripel $(a; b; d)$ heißt anisotrop, wenn $a^2 + b^2 - d^2 \neq 0$ ist, andernfalls heißt es isotrop. Wenn $(a; b; d)^*$ ein projektiver Punkt oder $[a; b; d]^*$ eine projektive Gerade ist, benutzen wir diese Bregriffe entsprechend.

Wir nennen Tripel $(p; q; s)$ und $(a; b; d)$ ‚K-orthogonal‘ oder ‚K-senkrecht zueinander‘ und schreiben kurz $(p; q; s) \perp^K (a; b; d)$, wenn $(p; q; s) * (a; b; d) = 0$ gilt. Wenn $[p; q; s]^*$ und $[a; b; d]^*$ projektive Geraden sind, werden sie dann ebenfalls ‚K-orthogonal‘ genannt. Wenn $(p; q; s)^*$ und $(a; b; d)^*$ projektive Punkte sind, werden sie ‚K-polar‘ genannt.

Dafür, dass ein projektiver Punkt $(x; y; t)^\bullet$ mit der projektiven Geraden $[a; b; d]^\bullet$ inzidiert, also $(x; y; t) \cdot (a; b; d) = 0$ gilt, schreiben wir abkürzend $(x; y; t)^\bullet \perp [a; b; d]^\bullet$.

Zu dem Tripel $g = (a; b; d) \in \mathbf{R}^3$ sei $g^\perp := \{(p; q; s) \in \mathbf{R}^3 \mid (p; q; s) * (a; b; d) = 0\}$ und $g^1 := \{(x; y; t) \in \mathbf{R}^3 \mid (x; y; t) \cdot (a; b; d) = 0\}$.

g^\perp und g^1 bilden einen zweidimensionalen Unter-Vektorraum von \mathbf{R}^3 falls $g \neq (0; 0; 0)$. Wenn $g * g = 0$ ist, gilt $g \in g^\perp$, andernfalls $g \notin g^\perp$, so dass sich dann jedes Tripel als Linearkombination von g und einem Tripel in g^\perp darstellen lässt. Im Fall $g * g \neq 0$ gilt auch $\bar{g} \notin g^1$, so dass jedes Tripel auch Linearkombination von \bar{g} und einem Tripel in g^1 ist.

Wenn $[a; b; d]^K$ eine K-Gerade ist, dann umfasst g^\perp die Menge der Tripel $(p; q; s)$ zu K-Geraden $[p; q; s]^K$, die orthogonal zu $[a; b; d]^K$ sind. g^\perp stimmt mit dieser Menge aber nicht überein, da es projektive Geraden $[p; q; s]^\bullet$ gibt, die den Einheitskreis nicht schneiden, für die aber $p \cdot a + q \cdot b - s \cdot d = 0$ gilt. Analog: g^1 umfasst die Menge der Tripel $(x; y; t)$ zu K-Geraden $(x; y; t)^K$, die auf $[a; b; d]^K$ liegen; außerhalb des Einheitskreises gibt es aber auch projektive Punkte $(x; y; t)^\bullet$, die mit $[a; b; d]^\bullet$ inzidieren.

Hilfssatz 8 : Sei $g = (a; b; d) \in \mathbf{R}^3$ anisotrop und $\bar{g} = (a; b; -d)$.

σ_g und σ'_g sind lineare Abbildungen des Vektorraums \mathbf{R}^3 .

σ_g ist die lineare Abbildung des \mathbf{R}^3 , für die gilt : $\bar{g}\sigma_g = \bar{g}$ und $p\sigma_g = -p$ für alle $p \in g^1$.

σ'_g ist die lineare Abbildung des \mathbf{R}^3 , für die gilt : $g\sigma'_g = g$ und $h\sigma'_g = -h$ für alle $h \in g^\perp$.

Beweis : Die Linearität folgt unmittelbar daraus, dass die $*$ -Verknüpfung linear ist. Dass \bar{g} , p , g und h wie angegeben abgebildet werden, erkennt man unmittelbar durch Einsetzen. Dass die Abbildungen dadurch eindeutig bestimmt sind, folgt aus der Linearität und der Tatsache, dass sowohl \bar{g} und g^1 , als auch g und g^\perp den ganzen Raum \mathbf{R}^3 aufspannen. \square

Hilfssatz 9 : Für $g = [a; b; d]$ mit $a^2 + b^2 - d^2 \neq 0$ gilt: σ_g ist eine involutorische lineare

Abbildung mit der Matrix $S_g = \frac{1}{a^2 + b^2 - d^2} \cdot \begin{pmatrix} a^2 - b^2 + d^2 & 2 \cdot a \cdot b & 2 \cdot a \cdot d \\ 2 \cdot a \cdot b & -a^2 + b^2 + d^2 & 2 \cdot b \cdot d \\ -2 \cdot a \cdot d & -2 \cdot b \cdot d & -a^2 - b^2 - d^2 \end{pmatrix}$.

Die entsprechende Matrix S'_g für eckige Klammern entsteht durch Ersetzung von d durch $-d$ oder durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen der Matrix. Außerdem gilt:

1. $(a; b; -d)\sigma_g = (a; b; -d)$ und $[a; b; d]\sigma'_g = [a; b; d]$
2. $((x_1; y_1; t_1)\sigma_g) * ((x_2; y_2; t_2)\sigma_g) = (x_1; y_1; t_1) * (x_2; y_2; t_2)$
3. $([p_1; q_1; s_1]\sigma'_g) * ([p_2; q_2; s_2]\sigma'_g) = [p_1; q_1; s_1] * [p_2; q_2; s_2]$
4. $((x; y; t)\sigma_g) \cdot ([p; q; s]\sigma'_g) = (x; y; t) \cdot [p; q; s] = x \cdot p + y \cdot q + t \cdot s$

5. $\left((x_1; y_1; t_1) \sigma_g \right) \times \left((x_2; y_2; t_2) \sigma_g \right) = \left[(x_1; y_1; t_1) \times (x_2; y_2; t_2) \right] \sigma'_g$
6. $\left([p_1; q_1; s_1] \sigma'_g \right) \times \left([p_2; q_2; s_2] \sigma'_g \right) = \left([p_1; q_1; s_1] \times [p_2; q_2; s_2] \right) \sigma_g$
7. $[a; b; d] \times \left([p; q; s] \sigma'_g \right) = -[a; b; d] \times [p; q; s]$

Beweis : Mit $\lambda := \frac{1}{a^2 + b^2 - d^2}$ ergibt sich durch Ausmultiplizieren für $(x; y; t) \sigma_g$:

$$\lambda \cdot (x(a^2 - b^2 + d^2) + 2aby + 2adt; 2abx + y(-a^2 + b^2 + d^2) + 2bdt; -2adx - 2bdy + t(-a^2 - b^2 - d^2))$$

Dies ist $(x; y; t) S_g$. Das Produkt von S_g mit sich ist die Einheitsmatrix. Darum ist σ_g involutorisch.

1. ergibt sich durch Ausmultiplizieren.
2. Wir kürzen in der folgenden Rechnung die Tripel durch ihre letzte Komponenten ab, so dass z. B. $t * (-d) = t \cdot d$ ist. Dann errechnet man

$$\left(-t_1 + 2 \frac{t_1 * (-d)}{(-d) * (-d)} (-d) \right) * \left(-t_2 + 2 \frac{t_2 * (-d)}{(-d) * (-d)} (-d) \right) =$$

$$t_1 * t_2 - 2 \frac{t_2 * (-d)}{(-d) * (-d)} t_1 * (-d) - 2 \frac{t_1 * (-d)}{(-d) * (-d)} t_2 * (-d) + 4 \frac{t_1 * (-d)}{(-d) * (-d)} \frac{t_2 * (-d)}{(-d) * (-d)} (-d) * (-d) = t_1 * t_2.$$

Analog rechnet man bei den eckigen Klammern.

3. folgt analog.

$$4. \left(-t + 2 \frac{t * (-d)}{(-d) * (-d)} (-d) \right) \cdot \left(-s + 2 \frac{s * d}{d * d} d \right) =$$

$$t \cdot s - 2 \frac{s * d}{d * d} t \cdot d - 2 \frac{t * (-d)}{d * d} s \cdot (-d) + 4 \frac{t * (-d)}{d * d} \frac{s * d}{d * d} (-d) \cdot d =$$

$$t \cdot s - 2 \frac{s * d}{d * d} t \cdot d - 2 \frac{t \cdot d}{d * d} s * d + 4 \frac{t \cdot d}{d * d} \frac{s * d}{d * d} d * d = t \cdot s.$$

5. Wegen $(x_i; y_i; t_i) \cdot [(x_1; y_1; t_1) \times (x_2; y_2; t_2)] = 0$ für $i \in \{1; 2\}$ folgt aus 4.

$\left((x_i; y_i; t_i) \sigma_g \right) \cdot \left[(x_1; y_1; t_1) \times (x_2; y_2; t_2) \right] \sigma'_g = 0$. Darum gibt es ein $\mu \in \mathbf{R}$ mit

$\left((x_i; y_i; t_i) \sigma_g \right) \times \left((x_2; y_2; t_2) \sigma_g \right) = \mu \cdot \left[(x_1; y_1; t_1) \times (x_2; y_2; t_2) \right] \sigma'_g$. Durch Ausmultiplizieren von

z. B. der ersten Komponente zeigt sich, dass hierbei $\mu = 1$ ist.

6. ergibt sich analog.

7. folgt durch Ausmultiplizieren. □

Hilfssatz 10 : $g = [a_1; b_1; d_1]^*$ und $h = [a_2; b_2; d_2]^*$ seien verschiedene projektive Geraden mit

$a_1^2 + b_1^2 - d_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 - d_2^2 \neq 0$ und $[a_1; b_1; d_1]^* [a_2; b_2; d_2] = 0$. $Q = (x; y; t)^*$ mit

$(x; y; t) = (a_1; b_1; d_1) \times (a_2; b_2; d_2)$ sei ihr Schnittpunkt und $q = [x; y; -t]^*$ die Polare von Q .

Dann gilt:

1. $x^2 + y^2 - t^2 = -\left(a_1^2 + b_1^2 - d_1^2 \right) \cdot \left(a_2^2 + b_2^2 - d_2^2 \right) \neq 0$
2. $q \in g^\perp$ und $q \in h^\perp$
3. $\sigma'_g \sigma'_h = \sigma'_q = \sigma'_h \sigma'_g$ und $\sigma_g \sigma_h = \sigma_q = \sigma_h \sigma_g$

Beweis : 1. folgt aus Hilfssatz 5.

2. $(x; y; -t) * (a_1; b_1; d_1) = (x; y; t) \cdot (a_1; b_1; d_1) = \left((a_1; b_1; d_1) \times (a_2; b_2; d_2) \right) \cdot (a_1; b_1; d_1) = 0$.

3. : Nach Hilfssatz 9 ist $[a_1; b_1; d_1] \sigma'_g \sigma'_h = [a_1; b_1; d_1] \sigma'_h = -[a_1; b_1; d_1]$,
 $[a_2; b_2; d_2] \sigma'_g \sigma'_h = -[a_2; b_2; d_2] \sigma'_h = -[a_2; b_2; d_2]$ und $[x; y; -t] \sigma'_g \sigma'_h = -[x; y; -t] \sigma'_h = [x; y; -t]$,
 folglich $\sigma'_g \sigma'_h = \sigma'_q$.

Die Matrizen von σ'_g und σ'_h sind also vertauschbar und haben als Produkt die Matrix von σ'_q . Da die Matrizen von σ_g , σ_h und σ_q aus σ'_g , σ'_h und σ'_q durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen entstehen, folgt darum $\sigma_g \sigma_h = \sigma_q = \sigma_h \sigma_g$. \square

Satz 27 :

1. Für eine anisotrope projektive Gerade g gilt:
 Q sei projektiver Punkt und h, j projektive Geraden. Dann liegt Q genau dann auf h , wenn $Q \sigma'_g$ auf $h \sigma'_g$ liegt. h ist orthogonal zu j genau dann, wenn $h \sigma'_g$ orthogonal zu $j \sigma'_g$ ist.
2. Für $g = [a; b; d]^K$ gilt: Die Restriktion von σ_g auf die Menge der K -Punkte ist die K -Spiegelung an g . σ'_g induziert dazu die Abbildung der K -Geraden. Der Pol von g wird durch σ_g auf sich abgebildet. Die Grenzpunkte einer K -Geraden h werden auf Grenzpunkte von $h \sigma'_g$ abgebildet. Wenn Σ_k die Abbildung aus Satz 21 ist, dann ist die Abbildung $\Sigma_k \Pi \sigma_g \Pi^{-1} \Sigma_k^{-1}$ (erst Σ_k , dann Π, \dots) die P -Spiegelung an einer P -Geraden. Die euklidische Verbindungsgerade eines K -Punktes Q mit dem Pol von g geht durch $Q \sigma_g$.
3. Sei q Polare eines K -Punktes Q . Dann ist die Restriktion von σ_q auf die Menge der K -Punkte die K -Spiegelung an Q . Wenn g und h zwei orthogonale Geraden durch Q sind, dann gilt $\sigma_g \sigma_h = \sigma_q = \sigma_h \sigma_g$.

Beweis :

1. folgt aus der 3. und 4. Behauptung von Hilfssatz 9.
2. Aus der 2. und 3. Behauptung von Hilfssatz 9 ergibt sich, dass K -Punkte auf K -Punkte und K -Geraden auf K -Geraden abgebildet werden.
 Aus der 4. Behauptung von Hilfssatz 9 folgt die Inzidenztreue für K -Geraden und mit der 2. Behauptung auch, dass Grenzpunkte von h auf Grenzpunkte von $h \sigma'_g$ abgebildet werden. Mit der 7. Behauptung von Hilfssatz 9 ergibt sich, dass alle Punkte Punkte auf g fest bleiben.

Die Abstandtreue folgt aus Satz 24. Daraus folgt auch, dass die Beträge der Winkelgrößen gleich bleiben.

Zum Nachweis, dass die Winkelgrößen invertiert werden, betrachten wir schneidende K -Geraden $[p_1; q_1; s_1]^K$ und $[p_2; q_2; s_2]^K$ mit den σ'_g -Spiegelungsbildern $[p'_1; q'_1; s'_1]^K$ und $[p'_2; q'_2; s'_2]^K$. Sei $(x; y; t) = [p_1; q_1; s_1] \times [p_2; q_2; s_2]$. Nach der 6. Behauptung von Hilfssatz 9 ist $[p'_1; q'_1; s'_1] \times [p'_2; q'_2; s'_2] = (x; y; t) \sigma_g$. Darum gilt für die dritte Komponente hiervon

$$p'_1 \cdot q'_2 - p'_2 \cdot q'_1 = - \frac{(a^2 + b^2 + d^2) \cdot t + 2 \cdot b \cdot d \cdot y + 2 \cdot a \cdot d \cdot x}{a^2 + b^2 - d^2} =$$

$$- \frac{(a \cdot t + d \cdot x)^2 + (b \cdot t + d \cdot y)^2 - d^2 \cdot (x^2 + y^2 - t^2)}{t \cdot (a^2 + b^2 - d^2)}. \text{ Wegen } x^2 + y^2 - t^2 < 0 \text{ ist der Zähler des}$$

letzten Terms positiv, ebenso $a^2 + b^2 - d^2$, da g H -Gerade ist. Es folgt

$\text{sign}(p'_1 \cdot q'_2 - p'_2 \cdot q'_1) = -\text{sign}(p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1)$. Darum invertiert σ'_g nach Satz 24 die Winkelgrößen.

Wegen $(a; b; -d)\sigma_g = (a; b; -d)$ bleibt der Pol $(a; b; -d)^*$ von g fest.

$\Sigma_k \Pi \sigma_g \Pi^{-1} \Sigma_k^{-1}$ ist nach Satz 21 eine inzidenz- und abstands-treue Abbildung der P-Punktmenge, welche die Winkelgrößen invertiert und die P-Gerade $g \Pi^{-1} \Sigma_k^{-1}$ punktweise festlässt. Darum muss $\Sigma_k \Pi \sigma_g \Pi^{-1} \Sigma_k^{-1}$ die P-Spiegelung an $g \Pi^{-1} \Sigma_k^{-1}$ sein. Da P-Spiegelungen den Betrag von P-Flächeninhalten unverändert lassen, bleibt auch bei der K-Spiegelung σ_g der Betrag des K-Flächeninhalts gleich, da die Maß-Form des K-Modells durch Übertragung der Maß-Form des P-Modells bestimmt wurde.

Dass die euklidische Verbindungsgerade eines K-Punkte Q mit dem Pol von g durch $Q\sigma_g$ geht, folgt daraus, dass der Pol von g fest bleibt.

3. Nach Hilfssatz 10 ist $\sigma_g \sigma_h = \sigma_q = \sigma_h \sigma_g$ für zwei orthogonale K-Geraden g und h durch Q .

Für jede K-Gerade $[a; b; d]^K$ durch $Q = (x; y; t)^K$ ist

$(a; b; d) * (x; y; -t) = (a; b; d) \cdot (x; y; t) = 0$. Darum bleibt sie bei σ_q fest. \square

Hilfssatz 11 : $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ und \overline{v}_3 seien linear abhängige Zahlentripel mit $\overline{v}_i * \overline{v}_i \neq 0$ für $i \in \{1; 2, 3\}$. σ'_i sei die Spiegelung (für eckige Klammern) an \overline{v}_i und $\overline{v}_4 := (\overline{v}_2 * \overline{v}_3) \cdot \overline{v}_1 - (\overline{v}_3 * \overline{v}_1) \cdot \overline{v}_2 + (\overline{v}_1 * \overline{v}_2) \cdot \overline{v}_3$. Dann ist $\overline{v}_4 * \overline{v}_4 \neq 0$ und $\sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3$ die Spiegelung an \overline{v}_4 .

Beweis : Man errechnet $\overline{v}_4 * \overline{v}_4 = (\overline{v}_1 * \overline{v}_1) \cdot (\overline{v}_2 * \overline{v}_2) \cdot (\overline{v}_3 * \overline{v}_3) + \det(\overline{v}_1; \overline{v}_2; \overline{v}_3)^2 \neq 0$, da wegen der linearen Abhängigkeit von $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ und \overline{v}_3 die daraus gebildete Determinante den Wert Null hat.

Wegen $((\overline{v}_1 * \overline{v}_2) \cdot \overline{v}_3 - (\overline{v}_3 * \overline{v}_1) \cdot \overline{v}_2) * \overline{v}_1 = (\overline{v}_1 * \overline{v}_2) \cdot (\overline{v}_3 * \overline{v}_1) - (\overline{v}_3 * \overline{v}_1) \cdot (\overline{v}_2 * \overline{v}_1) = 0$ gilt

$((\overline{v}_1 * \overline{v}_2) \cdot \overline{v}_3 - (\overline{v}_3 * \overline{v}_1) \cdot \overline{v}_2) \sigma'_1 = -(\overline{v}_1 * \overline{v}_2) \cdot \overline{v}_3 + (\overline{v}_3 * \overline{v}_1) \cdot \overline{v}_2$, darum ist

$\overline{v}_4 \sigma'_1 = (\overline{v}_2 * \overline{v}_3) \cdot \overline{v}_1 + (\overline{v}_3 * \overline{v}_1) \cdot \overline{v}_2 - (\overline{v}_1 * \overline{v}_2) \cdot \overline{v}_3$. Die anschließende Anwendung von σ'_2 und σ'_3 wechselt die Vorzeichen von \overline{v}_1 und \overline{v}_3 bzw. \overline{v}_1 und \overline{v}_2 , so dass $\overline{v}_4 \sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3 = \overline{v}_4 = \overline{v}_4 \sigma'_4$ folgt.

U sei der von $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ und \overline{v}_3 aufgespannte Unterraum von \mathbf{R}^3 . Wenn er eindimensional ist, stimmen sie Spiegelungen σ_i überein und die Behauptung ist klar. Wenn U zweidimensional ist, gibt es in U Tripel \overline{v}'_i mit $\overline{v}'_i * \overline{v}'_i = 0$ und $\overline{v}'_i * \overline{v}'_i \neq 0$ für $i \in \{1; 2, 3\}$. Für

$\overline{v}'_4 := \left(\overline{v}'_2 * \overline{v}'_3 \right) \cdot \overline{v}'_1 - \left(\overline{v}'_3 * \overline{v}'_1 \right) \cdot \overline{v}'_2 + \left(\overline{v}'_1 * \overline{v}'_2 \right) \cdot \overline{v}'_3$ zeigt man analog wie für \overline{v}_4 , dass

$\overline{v}'_4 \sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3 = -\overline{v}'_4 = \overline{v}'_4 \sigma'_4$ gilt.

Wegen der linearen Abhängigkeit von $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ und \overline{v}_3 gilt es ein zu allen drei Tripeln K-orthogonales Tripel $\overline{v}_5 \neq (0; 0; 0)$, das nicht in U liegt. Da \overline{v}_5 dann auch K-orthogonal zu \overline{v}_4 ist, errechnet man $\overline{v}_5 \sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3 = -\overline{v}_5 \sigma'_2 \sigma'_3 = \overline{v}_5 \sigma'_3 = -\overline{v}_5 = \overline{v}_5 \sigma'_4$. Damit hat man drei linear

unabhängige Tripel, die von $\sigma'_1\sigma'_2\sigma'_3$ und σ'_4 gleich abgebildet werden. Darum stimmen diese Abbildungen überein. \square

Da nach Satz 21 die Abbildung Σ_k das Poincare-Modell inzidenz-, winkel- und abstands-treu auf das Halbkugel-Modell abbildet und die Abbildung Π das Gleiche für den Übergang zum Beltrami-Klein-Modell leistet, gelten für das Beltrami-Klein-Modell alle Aussagen, die sich aus Satz 17 dadurch ergeben, dass man ‚Poincare-Modell‘ durch ‚Beltrami-Klein-Modell‘ ersetzt und jedes Präsignum-P durch ein Präsignum-K. Wir wiederholen Satz 17 als

Satz 28 :

1. Wenn g, h K-Geraden sind und Q bzw. R K-Punkte auf g bzw. h , dann gibt es genau vier K-Kongruenzabbildungen B mit $QB = R$ und $gB = h$. Wenn B eine dieser Kongruenzabbildungen ist, dann sind die anderen drei die Hintereinanderschaltungen $B\sigma_R$, $B\sigma_h$ und $B\sigma_R\sigma_h$.
2. Wenn ein K-Punkt R auf einer K-Geraden h liegt, dann ist $\sigma_R\sigma_h$ die Spiegelung an der K-Geraden m durch R , die orthogonal zu h ist, folglich auch $\sigma_R = \sigma_h\sigma_m$.
3. g, h und j seien drei K-Geraden mit einem gemeinsamen K-Punkt, einer gemeinsamen K-Orthogonalen oder sie seien hyperbolisch parallel mit dem gleichen Ende. Dann gibt es eine K-Gerade k mit $\sigma_g\sigma_h\sigma_j = \sigma_k$.
4. Wenn die K-Kongruenzabbildung den Punkt Q festlässt, dann ist B K-Spiegelung an einer Geraden durch Q oder die Hintereinanderschaltung von zwei derartigen K-Geraden.
5. Für jeden K-Punkt Q und jede K-Kongruenzabbildung B gilt: Wenn B gerade ist, gibt es eine K-Gerade g durch Q und eine weitere K-Gerade h mit $B = \sigma_h\sigma_g$; andernfalls gibt es eine K-Gerade g durch Q und einen K-Punkt R mit $B = \sigma_h\sigma_R$.

23. Maß-Kegelschnitte im Beltrami-Klein-Modell

Hilfssatz 12 : g, h seien K-Geraden mit einem gemeinsamen K-Lot j und Q ein K-Punkt.

1. e sei der K-Abstand von Q und g und L der Fußpunkt des K-Lots von Q auf g . Dann haben alle von L verschiedenen K-Punkte auf g von Q einen K-Abstand, der größer als e ist.
2. e sei der K-Abstand von h und g . R sei der K-Schnittpunkt von j und h . Dann haben alle von R verschiedenen K-Punkte auf h von g einen K-Abstand, der größer als e ist.

Beweis : 1. Die erste Behauptung lässt sich am einfachsten im Halbkugel-Modell beweisen und kann daraus unmittelbar auf das Beltrami-Klein-Modell übertragen werden.

Der H-Kreis um Q mit dem Radius e ist ein euklidischer Kreis auf der Halbkugel, der nur einen Punkt mit g gemeinsam hat, da das H-Lot auf g sowohl g als auch den H-Kreis senkrecht schneidet. Da H-Abstände streng monoton mit den euklidischen Abständen wachsen, folgt daraus die Behauptung.

2. Nach Satz 28 gibt es eine K-Kongruenzabbildung, die den Schnittpunkt von g und j auf den Ursprung $(0 ; 0)$ in kartesischen Koordinaten abbildet, g auf die Hochachse und h auf eine Gerade $x = a$ mit $0 < a < 1$. Es reicht darum nachzuweisen, dass ein Punkt $(a ; b)$ vom Punkt $(0 ; b)$ einen K-Abstand e' hat, der größer ist als der K-Abstand $e = \frac{1+a}{1-a}$ des Punktes $(a ; 0)$ von $(0 ; 0)$. Da $(0 ; b)$ K-Scheitelpunkt der Geraden $y = b$ ist und diese Gerade den

Einheitskreis im Punkt $(c; b)$ mit $c = \sqrt{1-b^2} < 1$ schneidet, ist $e' = \frac{c+a}{c-a}$. Aus

$$0 > 2 \cdot a \cdot (c-1) = (a-1) \cdot (a+c) - (a+1) \cdot (a-c) \text{ folgt } \frac{1+a}{1-a} > \frac{c+a}{c-a} \text{ und damit die Behauptung.}$$

□

Definition : Zu einem Tripel $Q = (x_Q; y_Q; t_Q)$ mit $x_Q^2 + y_Q^2 - t_Q^2 \neq 0$ sei die Abbildung ζ_Q für Tripel $(x; y; t)$ definiert durch

$$\zeta_Q : (x; y; t) \rightarrow -(x; y; t) \cdot (x \cdot x_Q + y \cdot y_Q - t \cdot t_Q) + (x_Q; y_Q; t_Q) \cdot (x^2 + y^2 - t^2).$$

Zu einem projektiven Punkt $Q = (x_Q; y_Q; t_Q)^*$ mit $x_Q^2 + y_Q^2 - t_Q^2 \neq 0$ sei der Bildpunkt eines Punktes $(x; y; t)^*$ gegeben durch $((x; y; t)\zeta_Q)^*$. Dabei soll $(x; y; t)^*$ verschieden von Q sein und weder auf der Polaren von Q liegen, noch auf einer Einheitskreis-Tangente durch Q .

Die Fortsetzung der Definition von der Menge der Tripel auf die der projektiven Punkte ist möglich, weil $(\lambda \cdot x; \lambda \cdot y; \lambda \cdot t)\zeta_Q = \lambda^2 \cdot (x; y; t)\zeta_Q$ und $(x; y; t)\zeta_{\lambda \cdot Q} = \lambda \cdot (x; y; t)\zeta_Q$, also der Faktor λ bei den Tripeln den projektiven Punkt nicht verändert.

Satz 29 : Wir kürzen $(x; y; t)$ bzw. $(x_Q; y_Q; t_Q)$ mit \vec{v} und \vec{v}_Q ab.

1. Als Abbildung für Tripel hat ζ_Q folgende Eigenschaften:

$$\vec{v} * \vec{v}_{\zeta_Q} = 0,$$

$$\vec{v}_Q * \vec{v}_{\zeta_Q} = -(\vec{v} \times \vec{v}_Q) * (\vec{v} \times \vec{v}_Q),$$

$$\vec{v}_{\zeta_Q} * \vec{v}_{\zeta_Q} = -(\vec{v} * \vec{v}) \cdot ((\vec{v} \times \vec{v}_Q) * (\vec{v} \times \vec{v}_Q)) = (\vec{v} * \vec{v}) \cdot (\vec{v}_Q * \vec{v}_{\zeta_Q}) \text{ und}$$

$$\vec{v}_{\zeta_Q} \zeta_Q = -\vec{v} \cdot (\vec{v}_Q * \vec{v}) \cdot ((\vec{v} \times \vec{v}_Q) * (\vec{v} \times \vec{v}_Q)).$$

2. Als Abbildung für projektive Punkte ist ζ_Q involutorisch. Wenn S das ζ_Q -Bild vom projektiven Punkt R ist, dann liegen Q , R und S auf einer Geraden. Jeder projektive Punkt auf dem Einheitskreis, der nicht auf der Polaren von Q liegt, wird in sich abgebildet. Wenn Q der Punkt $(0; 0; 1)^*$ ist, dann ist ζ_Q die Spiegelung am Einheitskreis.
3. Es sei Q der Pol der K -Geraden g , X der K -Punkt $(x; y; t)^K$ und h die K -Lotgerade von X auf g . Dann ist X_{ζ_Q} der Pol der Senkrechten auf h durch X . X und X_{ζ_Q} liegen harmonisch bezüglich der Enden von h .
4. Wenn Q K -Punkt ist, X der K -Punkt $(x; y; t)^K$ und h die K -Verbindungsgerade von Q und X , dann ist $(x; y; t)^K_{\zeta_Q}$ der Pol der Senkrechten auf h durch X .

Beweis : 1. $(x; y; t) * (x; y; t)\zeta_Q =$

$$-(x; y; t) * (x; y; t) \cdot (x \cdot x_Q + y \cdot y_Q - t \cdot t_Q) + ((x; y; t) * (x_Q; y_Q; t_Q)) \cdot (x \cdot x + y \cdot y - t \cdot t) = 0.$$

Mit Hilfssatz 5 errechnet man

$$\vec{v}_Q * \vec{v}_{\zeta_Q} = -(\vec{v}_Q * \vec{v}) \cdot (\vec{v} * \vec{v}_Q) + (\vec{v}_Q * \vec{v}_Q) \cdot (\vec{v} * \vec{v}) = -(\vec{v} \times \vec{v}_Q) * (\vec{v} \times \vec{v}_Q)$$

$$\vec{v}_{\zeta_Q} * \vec{v}_{\zeta_Q} = (-\vec{v} \cdot (\vec{v} * \vec{v}_Q) + \vec{v}_Q \cdot (\vec{v} * \vec{v})) * (-\vec{v} \cdot (\vec{v} * \vec{v}_Q) + \vec{v}_Q \cdot (\vec{v} * \vec{v})) =$$

$$\begin{aligned}
& (\vec{v} * \vec{v}) \cdot (\vec{v} * \vec{v}_Q)^2 - (\vec{v} * \vec{v}) \cdot (\vec{v} * \vec{v}_Q)^2 - (\vec{v} * \vec{v}) \cdot (\vec{v} * \vec{v}_Q)^2 + (\vec{v}_Q * \vec{v}_Q) \cdot (\vec{v} * \vec{v})^2 = \\
& -(\vec{v} * \vec{v}) \cdot (\vec{v} * \vec{v}_Q)^2 + (\vec{v}_Q * \vec{v}_Q) \cdot (\vec{v} * \vec{v})^2 = -(\vec{v} * \vec{v}) \cdot ((\vec{v} \times \vec{v}_Q) * (\vec{v} \times \vec{v}_Q)) \\
\vec{v}_{\zeta_Q} \zeta_Q &= -\vec{v}_{\zeta_Q} \cdot (\vec{v}_Q * \vec{v}_{\zeta_Q}) + \vec{v}_Q \cdot (\vec{v}_{\zeta_Q} * \vec{v}_{\zeta_Q}) = \\
\vec{v}_{\zeta_Q} \cdot (\vec{v} \times \vec{v}_Q) * (\vec{v} \times \vec{v}_Q) &- \vec{v}_Q \cdot (\vec{v} * \vec{v}) \cdot ((\vec{v} \times \vec{v}_Q) * (\vec{v} \times \vec{v}_Q)) = \\
(\vec{v}_{\zeta_Q} - \vec{v}_Q \cdot (\vec{v} * \vec{v})) \cdot ((\vec{v} \times \vec{v}_Q) * (\vec{v} \times \vec{v}_Q)) &= -\vec{v} \cdot (\vec{v}_Q * \vec{v}) \cdot ((\vec{v} \times \vec{v}_Q) * (\vec{v} \times \vec{v}_Q)).
\end{aligned}$$

2. Aus der letzten Gleichung folgt, dass ζ_Q involutorisch ist. Da \vec{v}_{ζ_Q} Linearkombination von \vec{v} und \vec{v}_Q ist, liegen die zugehörigen Punkte auf einer Geraden.

Wenn $(x; y; t)^*$ auf dem Einheitskreis liegt, folgt aus $x^2 + y^2 - t^2 = 0$, dass $(x; y; t)_{\zeta_Q} = -(x; y; t) \cdot (x \cdot x_Q + y \cdot y_Q - t \cdot t_Q)$ den gleichen projektiven Punkt wie $(x; y; t)$ angibt, sofern $x \cdot x_Q + y \cdot y_Q - t \cdot t_Q \neq 0$, also $(x; y; t)^*$ kein Schnittpunkt des Einheitskreises mit der Polaren von Q ist.

Wenn Q der Punkt $(0; 0; 1)^*$ ist, dann ist $(x; y; 1)_{\zeta_Q} = -(x; y; 1) \cdot (-1) + (0; 0; 1) \cdot (x^2 + y^2 - 1) = (x; y; x^2 + y^2)$ und dieses Tripel beschreibt den gleichen projektiven Punkt wie $\left(\frac{x}{x^2 + y^2}; \frac{y}{x^2 + y^2}; 1 \right)$, also den Bildpunkt bei Spiegelung am Einheitskreis.

3. Wenn Q der Pol der K-Geraden g ist und X der K-Punkt $(x; y; t)^K$, dann ist \vec{v}_{ζ_Q} Tripel eines projektiven Punktes auf der K-Lotgeraden h von X auf g, für das $\vec{v} \cdot \vec{v}_{\zeta_Q} = \vec{v} * \vec{v}_{\zeta_Q} = 0$ gilt. Darum geht die Polare dieses Punktes durch X und steht K-senkrecht auf h. Nach Satz 26 liegen X und X_{ζ_Q} harmonisch bezüglich der Enden von h.

4. ergibt sich analog wie 3.. □

Satz 30 :

1. $Q = (x_Q; y_Q; 1)^K$ sei ein K-Punkt und $\lambda > 1$. Dann liegt der K-Punkt $(x; y; 1)^K$ genau dann auf dem K-Kreis um Q mit dem K-Radius $r = \ln(\sqrt{\lambda - 1} + \sqrt{\lambda})$, wenn $(x \cdot x_Q + y \cdot y_Q - 1)^2 - \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 1)(x_Q^2 + y_Q^2 - 1) = 0$ ist. Dann ist $\lambda = (\cosh(r))^2$.
2. $Q = (x_Q; y_Q; 1)^K$ sei ein K-Punkt und $\lambda > 1$. Der projektive Punkt $X = (x; y; 1)^*$ mit $x^2 + y^2 > 1$ sei der Pol einer K-Geraden $h = [x; y; -1]^K$. Dann hat h von Q genau dann den (unsignierten) K-Abstand $r = \ln(\sqrt{\lambda - 1} + \sqrt{\lambda})$, wenn $(x \cdot x_Q + y \cdot y_Q - 1)^2 - (1 - \lambda) \cdot (x^2 + y^2 - 1)(x_Q^2 + y_Q^2 - 1) = 0$ ist. h ist dann Tangente mit X_{ζ_Q} als Berührungspunkt an den K-Kreis um Q vom Radius r.
3. $g = [a; b; d]^K$ sei eine K-Gerade und $\bar{\lambda} < 0$. Dann liegt der K-Punkt $(x; y; 1)^K$ genau dann auf einer der beiden K-Abstandskurven zu g mit dem (unsignierten) K-Abstand

$\delta = \ln\left(\sqrt{1-\bar{\lambda}} + \sqrt{-\bar{\lambda}}\right)$, wenn $(a \cdot x + b \cdot y + d)^2 - \bar{\lambda} \cdot (a^2 + b^2 - d^2) \cdot (x^2 + y^2 - 1) = 0$ ist.

Dann ist $\bar{\lambda} = -(\sinh(\delta))^2$.

4. $g = [a ; b ; d]^K$ sei eine K-Gerade und $\bar{\lambda} < 0$. Der projektive Punkt $X = (x; y; 1)^\bullet$ mit $x^2 + y^2 > 1$ sei der Pol einer K-Geraden $h = [x; y; -1]^K$. Dann hat h von g genau dann den Abstand $\delta = \ln\left(\sqrt{1-\bar{\lambda}} + \sqrt{-\bar{\lambda}}\right)$, wenn

$$(a \cdot x + b \cdot y + d)^2 - (1-\bar{\lambda}) \cdot (a^2 + b^2 - d^2) \cdot (x^2 + y^2 - 1) = 0 \text{ ist.}$$

h ist dann Tangente mit X_{ζ_Q} als Berührungspunkt an der beiden K-Abstandskurven zu g mit dem K-Abstand δ .

5. $g = [a ; b ; d]^K$ sei eine K-Gerade und $0 \leq \mu \leq 1$. Der projektive Punkt $(x; y; 1)^\bullet$ mit $x^2 + y^2 > 1$ sei der Pol einer K-Geraden $h = [x; y; -1]^K$. Dann bildet h mit g einen Winkel der Größe $\arccos(\sqrt{\mu})$ oder $-\arccos(\sqrt{\mu})$ modulo 180° genau dann, wenn

$$(a \cdot x + b \cdot y + d)^2 - \mu \cdot (a^2 + b^2 - d^2) \cdot (x^2 + y^2 - 1) = 0 \text{ ist.}$$

Beweis : 1. folgt unmittelbar aus der 2. Behauptung von Satz 24.

2. Wenn man in der 3. Behauptung von Satz 24 an die Stelle von $[a ; b ; d]^H$ das Tripel $[x; y; -1]^K$ setzt und für $(x; y; 1)^H$ das Tripel $(x_Q; y_Q; 1)^K$, dann ist das dort angegebene

$$\bar{\lambda} = \frac{(x \cdot x_Q + y \cdot y_Q - 1)^2}{(x^2 + y^2 - 1) \cdot (x_Q^2 + y_Q^2 - 1)}, \text{ wobei } \ln\left(\sqrt{1-\bar{\lambda}} + \sqrt{-\bar{\lambda}}\right) \text{ den Abstand } e \text{ angibt. Für}$$

$\lambda = 1 - \bar{\lambda}$ ist dies äquivalent mit $e = \ln\left(\sqrt{\lambda-1} + \sqrt{\lambda}\right)$ und

$$(x \cdot x_Q + y \cdot y_Q - 1)^2 - (1-\lambda) \cdot (x^2 + y^2 - 1)(x_Q^2 + y_Q^2 - 1) = 0.$$

Da nach Hilfssatz 12 nur ein K-Punkt auf h den Abstand r von Q hat, muss h Tangente an den K-Kreis um Q mit dem Radius r sein. Nach Satz 29 ist der Berührungspunkt X_{ζ_Q} .

3. folgt unmittelbar aus der 3. Behauptung von Satz 24.

4. Wenn man in der 4. Behauptung von Satz 24 an die Stelle von $[a_1 ; b_1 ; d_1]^H$ das Tripel $[a ; b ; d]^K$ setzt und für $[a_2 ; b_2 ; d_2]^H$ das Tripel $[x; y; -1]^K$, dann ist das dort angegebene

$$\bar{\lambda} = \frac{(a \cdot x + b \cdot y + d)^2}{(a^2 + b^2 - d^2) \cdot (x^2 + y^2 - 1)}, \text{ wobei } \ln\left(\sqrt{1-\bar{\lambda}} + \sqrt{-\bar{\lambda}}\right) \text{ den K-Abstand } e \text{ angibt. Wie bei}$$

der 2. Behauptung ist dies für $\lambda = 1 - \bar{\lambda}$ äquivalent mit $e = \ln\left(\sqrt{\lambda-1} + \sqrt{\lambda}\right)$ und

$$(x \cdot x_Q + y \cdot y_Q - 1)^2 - (1-\lambda) \cdot (x^2 + y^2 - 1)(x_Q^2 + y_Q^2 - 1) = 0.$$

Aus Hilfssatz 12 ergibt sich auch hier, dass h Tangente an eine der beiden K-Abstandskurven zu g mit dem K-Abstand e ist. Wieder nach Satz 29 ist der Berührungspunkt X_{ζ_Q} .

5. Mit $g_1 = g$ und $g_2 = h$ folgt die 5. Behauptung aus der 5. von Satz 24, denn wenn man $(\cos(\alpha))^2 = \lambda$ setzt, folgt $|\cos(\alpha)| = \sqrt{\lambda}$, also $\alpha = \arccos(\sqrt{\lambda})$ oder $\alpha = -\arccos(\sqrt{\lambda})$

modulo

180° .

□

Die Kurven-Schar $(a \cdot x + b \cdot y + d)^2 - \lambda \cdot (a^2 + b^2 - d^2) \cdot (x^2 + y^2 - 1) = 0$ ähnelt der Schar $(a \cdot x + b \cdot y + d) - \lambda \cdot (a^2 + b^2 - d^2) \cdot (x^2 + y^2 - 1) = 0$ insofern, als sie beide die Gerade $g: a \cdot x + b \cdot y + d = 0$ enthalten und sich die Kurven bei beiden für $\lambda \rightarrow \infty$ dem Einheitskreis nähern. Die zweite Schar besteht aus allen Kurven des erweiterten Kreis-Büschels, das den Einheitskreis enthält und g als Potenzgerade hat, mit Ausnahme von g . Die erste Schar besteht aus Kegelschnitten, die für $\lambda \cdot (a^2 + b^2 - d^2) > 0$ außerhalb des Einheitskreises liegen. Bemerkenswert ist, dass diese Kegelschnitte auch dann für das Beltrami-Klein-Modell einen geometrischen Sinn haben können, wie die 2., 4. und 5. Behauptung von Satz 30 zeigen.

Definition : $Q = (p; q; s)^*$ sei ein projektiver Punkt und λ eine reelle Zahl. Den Kegelschnitt $M(Q, \lambda)$ mit der Menge projektiver Punkte

$$\left\{ (x; y; t)^* \mid x, y, t \in \mathbf{R} \wedge (x; y; t) \neq (0; 0; 0) \wedge (p \cdot x + q \cdot y - s \cdot t)^2 - \lambda \cdot (p^2 + q^2 - s^2) \cdot (x^2 + y^2 - t^2) = 0 \right\}$$

bezeichnen wir als ‚Maß-Kegelschnitt zu Q und λ ‘.

In dieser Definition erfassen wir auch unendlich ferne Punkte $(x; y; 0)^*$ des Kegelschnitts. Die Aussagen des Satzes 30 lassen sich auch auf diese Punkte übertragen.

Die Tangenten an den Maß- Kegelschnitt $M(Q; \lambda)$ spielen auch für λ -Werte zwischen 0 und 1 eine Rolle. Zur Klärung dient die folgende

Definition : Sei $C(x; y; t) = a \cdot x^2 + b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2 + d \cdot y \cdot t + e \cdot t^2 + f \cdot t \cdot x$ mit Konstanten a, b, c, d, e, f , die nicht alle gleich Null sind. Dann ist $C(x; y; t) = 0$ die (projektive) Gleichung eines Kegelschnitts in allgemeiner Form. Dann bezeichnen wir die folgende Abbildung \hat{C} für Tripel-Paare als ‚zu C gehörige Bilinearform‘:

$$\hat{C}: ((x_1; y_1; t_1); (x_2; y_2; t_2)) \rightarrow C(x_1 + x_2; y_1 + y_2; t_1 + t_2) - C(x_1; y_1; t_1) - C(x_2; y_2; t_2).$$

Es folgt $\hat{C}((x_1; y_1; t_1); (x_2; y_2; t_2)) = 2 \cdot a \cdot x_1 \cdot x_2 + b \cdot x_1 \cdot y_2 + b \cdot x_2 \cdot y_1 + 2 \cdot c \cdot y_1 \cdot y_2 +$

$$d \cdot y_1 \cdot t_2 + d \cdot y_2 \cdot t_1 + 2 \cdot e \cdot t_1 \cdot t_2 + f \cdot t_1 \cdot x_2 + f \cdot t_2 \cdot x_1$$

$$= (x_1; y_1; t_1) \begin{pmatrix} 2 \cdot a & b & f \\ b & 2 \cdot c & d \\ f & d & 2 \cdot e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \text{ und } C(x; y; t) = 0,5 \cdot (x; y; t) \begin{pmatrix} 2 \cdot a & b & f \\ b & 2 \cdot c & d \\ f & d & 2 \cdot e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}.$$

Hilfssatz 13 :

1. Sei $C(x; y; t) = a \cdot x^2 + b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2 + d \cdot y \cdot t + e \cdot t^2 + f \cdot t \cdot x = 0$, $P = (x_1; y_1; t_1)^*$ ein projektiven Punkt auf diesem Kegelschnitt und $g = [x; y; t]^*$ die projektive Gerade mit $\hat{C}((x_1; y_1; t_1); (x; y; t)) = 0$. Dann ist g Tangente an den Kegelschnitt in P .
2. $Q = (p; q; s)^*$ sei ein projektiver Punkt und λ eine reelle Zahl. Die zum Maß-Kegelschnitt $M(Q; \lambda)$ gehörige Bilinearform ist $\hat{M}: ((x_1; y_1; t_1); (x_2; y_2; t_2)) \rightarrow 2 \cdot ((p \cdot x_1 + q \cdot y_1 - s \cdot t_1) \cdot (p \cdot x_2 + q \cdot y_2 - s \cdot t_2) - \lambda \cdot (p^2 + q^2 - s^2) \cdot (x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 - t_1 \cdot t_2))$

3. Sei $\overline{v}_1 = (x_1; y_1; t_1)$ und $\overline{v}_Q = (p; q; s)$. Dann ist das Tripel der Tangente an $M(Q; \lambda)$ im Punkt $P = (x_1; y_1; t_1)^*$ auf $M(Q; \lambda)$ durch $(\overline{v}_1 * \overline{v}_Q) \cdot \overline{v}_Q - \lambda \cdot (\overline{v}_Q * \overline{v}_Q) \cdot \overline{v}_1$ gegeben.

Beweis: 1. Wegen $\hat{C}((x_1; y_1; t_1); (x_1; y_1; t_1)) = 2 \cdot C(x_1; y_1; t_1) = 0$ liegt der Punkt P auf g .

Es sei $R = (x_2; y_2; t_2)^*$ ein weiterer gemeinsamer Punkt von g und dem Kegelschnitt und $S = (r \cdot x_1 + s \cdot x_2; r \cdot y_1 + s \cdot y_2; r \cdot t_1 + s \cdot t_2)^*$. Wir benutzen die Abkürzungen $\overline{v}_i = (x_i; y_i; t_i)$.

Dann ist $\hat{C}(\overline{v}_1; \overline{v}_2) = 0$, da R auf g liegt und

$$2 \cdot C(r \cdot \overline{v}_1 + s \cdot \overline{v}_2) = \hat{C}(r \cdot \overline{v}_1 + s \cdot \overline{v}_2; r \cdot \overline{v}_1 + s \cdot \overline{v}_2) = r^2 \cdot \hat{C}(\overline{v}_1; \overline{v}_1) + 2rs \cdot \hat{C}(\overline{v}_1; \overline{v}_2) + s^2 \cdot \hat{C}(\overline{v}_2; \overline{v}_2) = 0$$

Wenn es also einen zweiten gemeinsamen Punkt R mit g gibt, liegt jeder Punkt von g auf dem Kegelschnitt, der dann notwendig ein Geradenpaar ist. g ist dann eine der Geraden des Paares, folglich auch eine Tangente. Wenn es keinen zweiten gemeinsamen Punkt gibt, dann ist g Tangente, weil für eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel Tangenten die Geraden sind, die mit diesen Kurven genau einen Punkt gemeinsam haben.

2. Der Term $(p \cdot x + q \cdot y - s \cdot t)^2 - \lambda \cdot (p^2 + q^2 - s^2) \cdot (x^2 + y^2 - t^2)$ von $M(Q; \lambda)$ kann in

$$\text{Matrixform durch } (x; y; t) \cdot \left(\begin{pmatrix} p \\ q \\ -s \end{pmatrix} \cdot (p \quad q \quad -s) - \lambda \cdot (p^2 + q^2 - s^2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}$$

beschrieben werden. Dabei ist die mittlere Matrix die Matrix der Bilinearform multipliziert mit 0,5. Daraus folgt der Term der Behauptung, wenn man $(x; y; t)$ durch $(x_1; y_1; t_1)$ und die Spalte $(x; y; t)'$ durch $(x_2; y_2; t_2)'$ ersetzt.

3. Wenn man die mittlere Matrix in dem Matrix-Term zur 2. Behauptung von links mit $(x_1; y_1; t_1)$ multipliziert, ergibt sich der Term für die Tangente in P . \square

Satz 31 : $Q = (x_Q; y_Q; t_Q)^*$ sei ein projektiver Punkt, λ eine reelle Zahl und $M(Q; \lambda)$ der zugehörige Maß-Kegelschnitt. $R = (x_R; y_R; t_R)^*$ sei ein projektiver Punkt auf $M(Q; \lambda)$ und $S = R_{C_Q}$. Dann gilt:

1. S liegt auf $M(Q; 1 - \lambda)$.
2. Die Polare von S ist Tangente an $M(Q; \lambda)$ im Punkt R und die Polare von R Tangente an $M(Q; 1 - \lambda)$ in S .

Beweis : Sei $\overline{v}_Q = (x_Q; y_Q; t_Q)$, entsprechend sei \overline{v}_R definiert.

$$1. \overline{v}_S := \overline{v}_R C_Q = -(\overline{v}_R * \overline{v}_Q) \cdot \overline{v}_R + (\overline{v}_R * \overline{v}_R) \cdot \overline{v}_Q, \text{ also}$$

$$\overline{v}_Q * \overline{v}_S = -(\overline{v}_Q * \overline{v}_R)^2 + (\overline{v}_Q * \overline{v}_Q) \cdot (\overline{v}_R * \overline{v}_R)$$

$$\lambda \cdot (\overline{v}_Q * \overline{v}_Q) \cdot (\overline{v}_R * \overline{v}_R) = (\overline{v}_Q * \overline{v}_R)^2, \text{ da } R \text{ auf } M(Q; \lambda) \text{ liegt,}$$

und nach Satz 29 ist $\overline{v}_S * \overline{v}_S = (\overline{v}_R * \overline{v}_R) \cdot (\overline{v}_Q * \overline{v}_S)$. Also ist

$$\begin{aligned}
& (\overline{v_Q * v_S})^2 - (1-\lambda) \cdot (\overline{v_Q * v_Q}) \cdot (\overline{v_R * v_R}) \cdot (\overline{v_Q * v_S}) = \\
& (\overline{v_Q * v_S})^2 - (\overline{v_Q * v_Q}) \cdot (\overline{v_R * v_R}) \cdot (\overline{v_Q * v_S}) + (\overline{v_Q * v_R})^2 \cdot (\overline{v_Q * v_S}) = \\
& (\overline{v_Q * v_S}) \cdot \left((\overline{v_Q * v_S}) - (\overline{v_Q * v_Q}) \cdot (\overline{v_R * v_R}) + (\overline{v_Q * v_R})^2 \right) = 0.
\end{aligned}$$

S liegt also auf $M(Q; 1-\lambda)$.

2. Die Polare von S gehört zum Tripel $-(\overline{v_R * v_Q}) \cdot \overline{v_R} + (\overline{v_R * v_R}) \cdot \overline{v_Q}$.

Nach Hilfssatz 13 ist die Tangente in R durch das Tripel $(\overline{v_R * v_Q}) \cdot \overline{v_Q} - \lambda \cdot (\overline{v_Q * v_Q}) \cdot \overline{v_R} =$

$$(\overline{v_R * v_Q}) \cdot \overline{v_Q} - \frac{(\overline{v_Q * v_R})^2}{\overline{v_R * v_R}} \cdot \overline{v_R} = \frac{\overline{v_R * v_Q}}{\overline{v_R * v_R}} \left(-(\overline{v_R * v_Q}) \cdot \overline{v_R} + (\overline{v_R * v_R}) \cdot \overline{v_Q} \right)$$

gegeben. Beide Tripel beschreiben also die gleiche Gerade. □

Die Abbildung 25 zeigt die Bedeutung der Maß-Kegelschnitte am Beispiel des schwarz gezeichneten Punktes $Q = (1,5; 1,5; 1)^*$ und $\lambda = 0,5$. Die Polare von Q ist die schwarze Geraden $g = [1,5; 1,5; -1]^K$. Die magentarote Hyperbel $M(Q, \lambda)$ hat die Gleichung $(1,5 \cdot x + 1,5 \cdot y - t)^2 - 0,5 \cdot (1,5^2 + 1,5^2 - 1) \cdot (x^2 + y^2 - t^2) = 0$. Die farbigen Geraden zu Polen auf $M(Q, \lambda)$ schneiden g alle mit einem Winkel der K-Größe 45° , da $(\cos(45^\circ))^2 = 0,5$ ist. Die Gleichheit der Winkel wird euklidisch sichtbar im Schnittwinkel der Bogen, die zu g und den farbigen Geraden gehören.

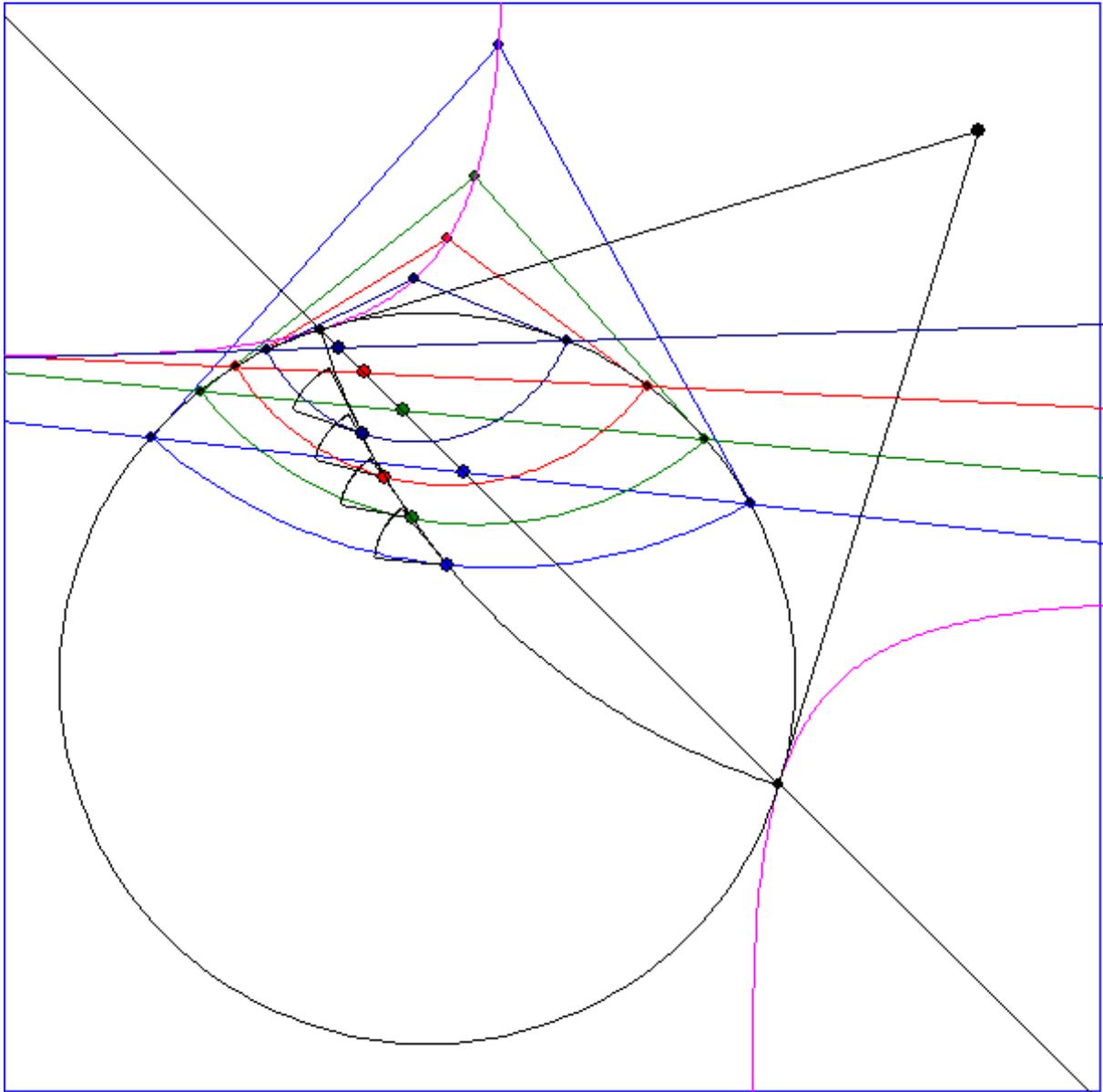


Abb. 25

Die Abbildung 26 verdeutlicht die Aussage von Satz 31. Q ist der Pol der Geraden g . Die magenta-rote Hyperbel zeigt den Maß-Kegelschnitt $M(Q; 0,45)$ und die blaue den Maß-Kegelschnitt $M(Q; 0,55)$. Die Geraden g , b und a schneiden sich im Punkt P . Am Winkel-Maßpunkt P' von P ist die K -Größe der Winkels zwischen a und g angezeigt, nämlich $\arccos(\sqrt{0,45}) \approx 47,9^\circ$. Der Winkel zwischen den Geraden b und g hat die K -Größe $\arccos(\sqrt{0,55}) \approx 42,1^\circ$. b und a sind zueinander orthogonal. Nach Satz 31 berührt b den Maß-Kegelschnitt $M(Q;0,45)$ in A und a den Maß-Kegelschnitt $M(Q;0,55)$ in B . Da P der Schnittpunkt der Polaren von A und B ist, muss nach Satz 26 h die Polare von P sein. Aus entsprechendem Grund ist die Gerade PQ Polare von S , so dass PQS ein Polar-Dreieck bildet, das heißt ein Dreieck, bei dem die Eckpunkte paarweise zueinander polar sind und die Seiten-Geraden paarweise zueinander orthogonal. Da die nicht eingezeichnete Gerade PQ zu g orthogonal ist, schneiden sich die Kreisbögen zu PQ und g senkrecht in P' . Da S das Zentrum des Kreisbogens zu PQ ist, geht die Tangente an den Kreisbogen zu g in P' durch S . Die

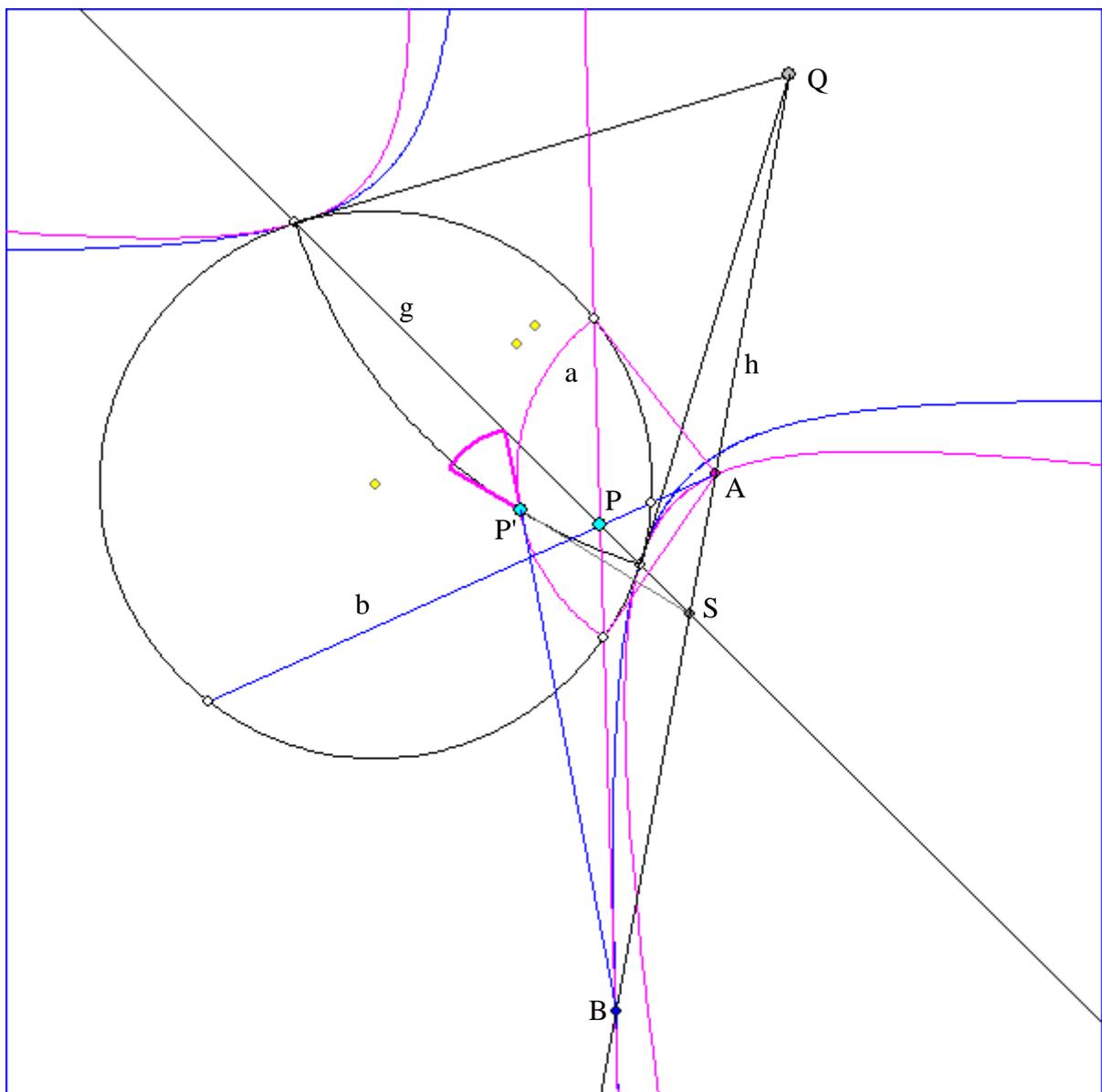


Abb. 26

euklidische Größe des Winkels $BP'S$ stimmt also mit dem der K -Winkelgröße zwischen g und a überein.

B_0 auf $M(Q;2)$. Da B_1 und B_2 auf der Kreistangente in C_0 liegen, gehen ihre gelb gezeichneten Polaren durch C_0 ; sie sind ebenfalls Tangenten an $M(Q;-1)$.

Die Punkte Q , R und S bilden ein Polar-Dreieck.

In Abbildung 28 wird der entsprechende Zusammenhang bei K-Kreisen dargestellt. Q ist hier ein Punkt innerhalb des Einheitskreises. Die grünen K-Kreise haben Vielfache von 0,2 als Radien. Der magentafarbene K-Kreis ist der Maß-Kegelschnitt $M(Q;5)$ mit dem K-Radius $\ln(2+\sqrt{5}) \approx 1,44$. Die Punkte des blauen Maß-Kegelschnitts $M(Q;-4)$ sind die Pole der Tangenten an den K-Kreis $M(Q;5)$. Auch hier bilden die Punkte Q , R und S ein Polar-Dreieck mit den zueinander orthogonalen projektiven Geraden g , h und j als Seitengeraden.

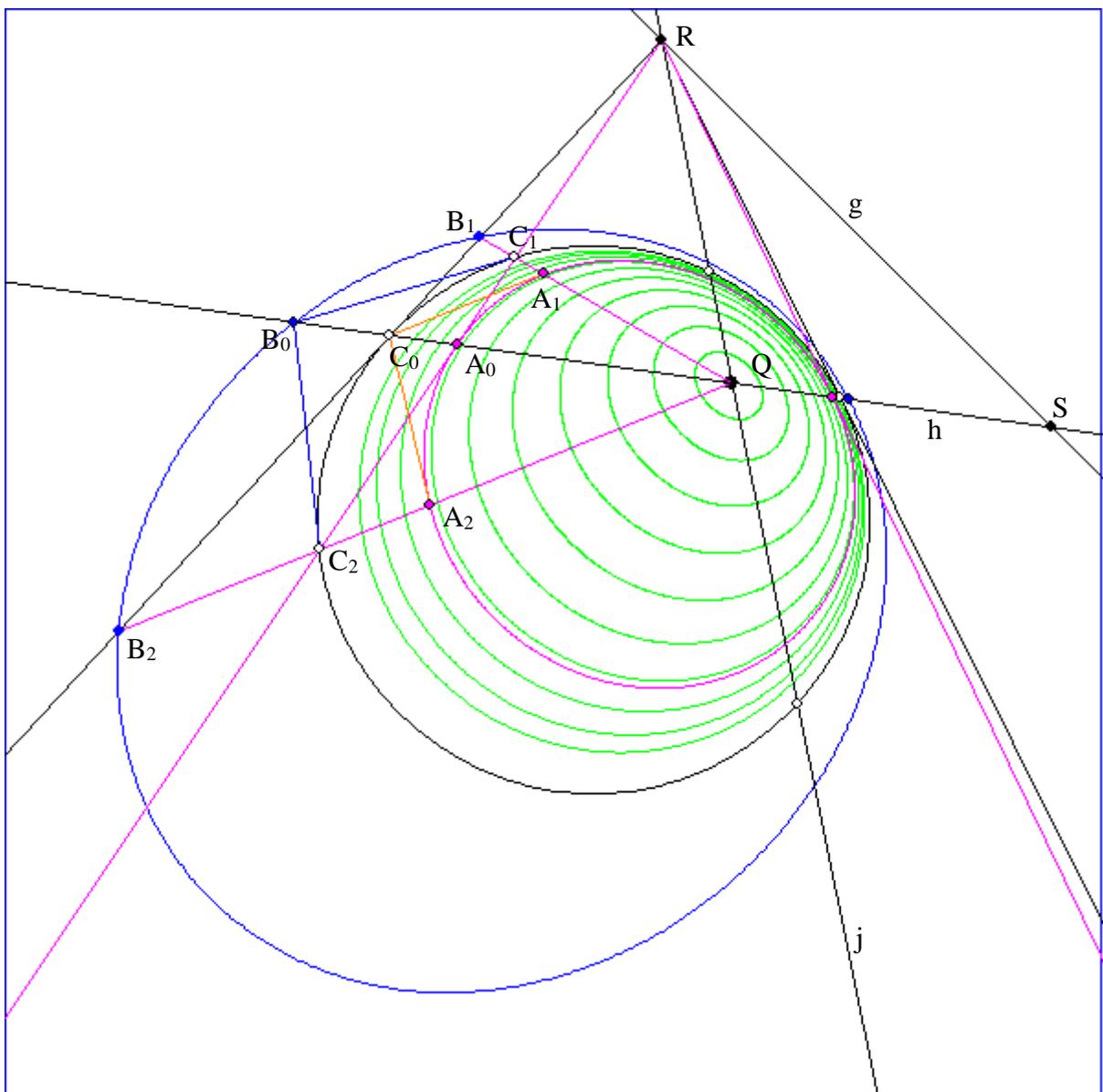


Abb. 28

24. Baryzentrum, Umkreis-Zentrum, Orthozentrum und Inkreis-Zentrum

Definition : A, B und C seien K -Punkte. Unter dem K -Inkreis-Zentrum des Dreiecks ABC verstehen wir den projektiven Schnittpunkt der drei K -Winkelhalbierenden im Innern des K -Dreiecks ABC und unter dem K -Baryzentrum den projektiven Schnittpunkt der drei K -Seitenhalbierenden. Entsprechend werden das K -Orthozentrum für die K -Höhen und das K -Umkreis-Zentrum für die K -Mittelsenkrechten definiert.

Wir beweisen im Folgenden, dass die drei Geraden gleicher Art jeweils einem projektiven Punkt gemeinsam haben, der im Fall der K -Höhen und K -Mittelsenkrechten aber nicht notwendig ein K -Punkt ist, wie Abbildung 29 zeigt. Diese Abbildung zeigt auch, dass der Schnittpunkt S (K -Baryzentrum) der K -Seitenhalbierenden, der Schnittpunkt H (K -Orthozentrum) der K -Höhen und der Schnittpunkt M (K -Umkreis-Zentrum) nicht kollinear sind, also nicht wie in der euklidischen Geometrie gemeinsam auf einer Euler-Geraden liegen.

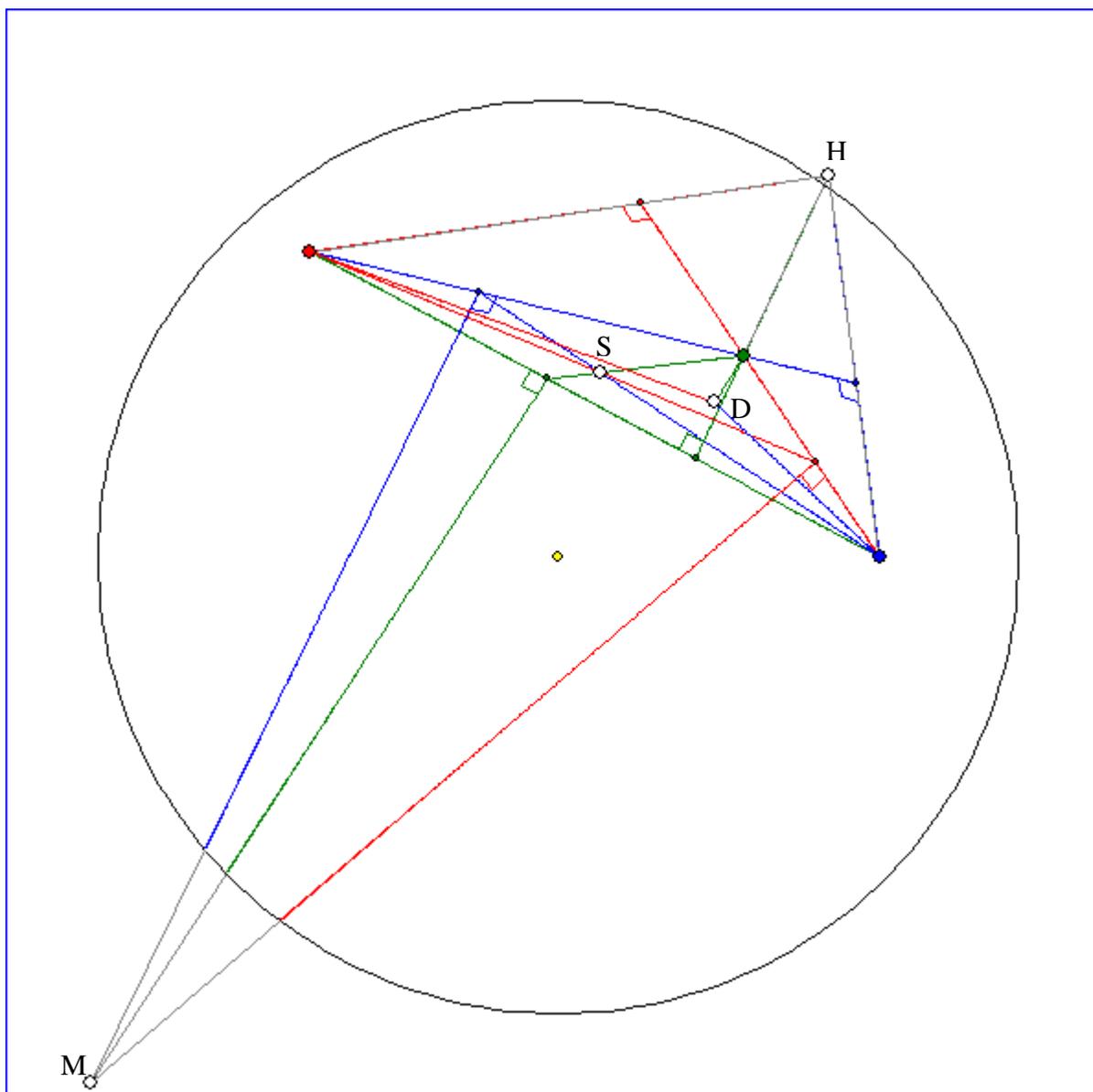


Abb. 29

Satz 32 (Abb. 30): Gegeben seien projektive Punkte G, H, J und Q , von denen keine drei kollinear sind. $M_{\text{HJ}}, M_{\text{JG}}$ und M_{GH} seien Schnittpunkte zu den Geradenpaaren GQ, HJ bzw. HQ, JG bzw. JQ, GH . $M'_{\text{HJ}}, M'_{\text{JG}}$ und M'_{GH} seien Punkt auf HJ bzw. JG bzw. GH , so dass $M_{\text{HJ}}, M'_{\text{HJ}}$ harmonisch bezüglich H, J liegen und Entsprechendes für $M_{\text{JG}}, M'_{\text{JG}}$ und M'_{GH} gilt. Dann gilt:

1. Es gibt Tripel $\overrightarrow{v_G}, \overrightarrow{v_H}, \overrightarrow{v_J}$ und $\overrightarrow{v_Q}$ zu G, H, J und Q , so dass $\overrightarrow{v_Q} = \overrightarrow{v_G} + \overrightarrow{v_H} + \overrightarrow{v_J}$ ist.
2. $\overrightarrow{v_H} + \overrightarrow{v_J}$ ist Tripel von M_{HJ} . Wenn $\overrightarrow{v_H} = (x_H; y_H; t_H)$ und $\overrightarrow{v_J} = (x_J; y_J; t_J)$, dann teilt M_{HJ} die Strecke HJ im Verhältnis $\frac{t_H}{t_J}$.

3. $\overrightarrow{v_H} - \overrightarrow{v_J}$ ist Tripel von M'_{HJ} .
4. M'_{HJ} , M'_{JG} und M'_{GH} liegen gemeinsam auf einer Geraden q zum Tripel $\overrightarrow{v_H} \times \overrightarrow{v_J} + \overrightarrow{v_J} \times \overrightarrow{v_G} + \overrightarrow{v_G} \times \overrightarrow{v_H}$.

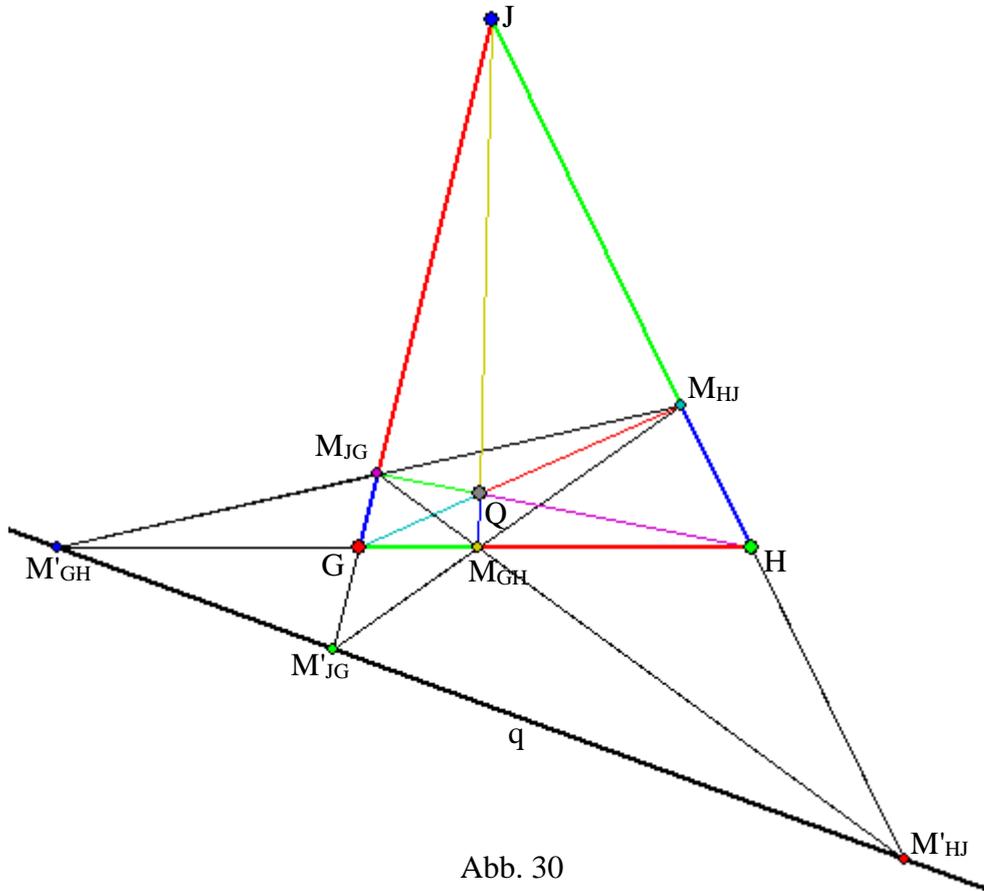


Abb. 30

Beweis : 1. Da G, H und J nicht kollinear sind, gibt es dazu Tripel $\overrightarrow{u_G}, \overrightarrow{u_H}, \overrightarrow{u_J}$, die eine Basis des \mathbf{R}^3 bilden. Darum gibt es Zahlen r_G, r_H und r_J , so dass $r_G \cdot \overrightarrow{u_G} + r_H \cdot \overrightarrow{u_H} + r_J \cdot \overrightarrow{u_J}$ ein Tripel von Q ist. Mit $\overrightarrow{v_G} := r_G \cdot \overrightarrow{u_G}$, $\overrightarrow{v_H} := r_H \cdot \overrightarrow{u_H}$ und $\overrightarrow{v_J} := r_J \cdot \overrightarrow{u_J}$ folgt daraus die 1.

Behauptung.

2. $\overrightarrow{v_H} + \overrightarrow{v_J}$ ist Tripel von M_{HJ} , weil es Linearkombination von $\overrightarrow{v_H}$ und $\overrightarrow{v_J}$ ist, und wegen $\overrightarrow{v_H} + \overrightarrow{v_J} = \overrightarrow{v_Q} - \overrightarrow{v_G}$ auch von $\overrightarrow{v_Q}$ und $\overrightarrow{v_G}$. Entsprechendes zeigt man für M_{JG} und M_{GH} . Für $\overrightarrow{v_H} = (x_H; y_H; t_H)$ und $\overrightarrow{v_J} = (x_J; y_J; t_J)$ ist $(x_H + x_J; y_H + y_J; t_H + t_J)$ Tripel von M_{HJ} . Wenn M_{HJ} kein unendlich ferner Punkt ist, dann ist

$$\begin{pmatrix} x_H + x_J \\ y_H + y_J \\ t_H + t_J \end{pmatrix} = \frac{t_H}{t_H + t_J} \begin{pmatrix} x_H \\ y_H \\ t_H \end{pmatrix} + \frac{t_J}{t_H + t_J} \begin{pmatrix} x_J \\ y_J \\ t_J \end{pmatrix}. M_{HJ} \text{ teilt also die Strecke } HJ$$

euklidisch im Verhältnis $\frac{t_H}{t_J}$. Wenn M_{HJ} unendlich ferner Punkt ist, dann ist $t_H = t_J$ und M_{HJ}

ist euklidischer Mittelpunkt von HJ, also das Teilverhältnis ebenfalls $\frac{t_H}{t_J}$.

3. Analog zeigt man, dass $\overrightarrow{v_H} - \overrightarrow{v_J}$ Tripel eines projektiven Punktes ist, der die Strecke HJ im Verhältnis $-\frac{t_H}{t_J}$ teilt, also im gleichen Verhältnis wie M'_{HJ} . Darum ist $\overrightarrow{v_H} - \overrightarrow{v_J}$ Tripel von M'_{HJ} .

4. Wegen $(\overrightarrow{v_H} - \overrightarrow{v_J}) \cdot (\overrightarrow{v_H} \times \overrightarrow{v_J} + \overrightarrow{v_J} \times \overrightarrow{v_G} + \overrightarrow{v_G} \times \overrightarrow{v_H}) = \overrightarrow{v_H} \cdot (\overrightarrow{v_J} \times \overrightarrow{v_G}) - \overrightarrow{v_J} \cdot (\overrightarrow{v_G} \times \overrightarrow{v_H}) = \det(\overrightarrow{v_H}; \overrightarrow{v_J}; \overrightarrow{v_G}) - \det(\overrightarrow{v_J}; \overrightarrow{v_G}; \overrightarrow{v_H}) = 0$ liegt M'_{HJ} auf q, ebenso M'_{JG} und M'_{GH} . \square

Definition : Die Gerade q durch M'_{HJ} , M'_{JG} und M'_{GH} heißt ,trilineare Polare von Q bezüglich G, H, J'.

Diese trilineare Polare muss von der Polaren bezüglich des Einheitskreises unterschieden werden.

Definition : Ein Tripel [a;b;d] der K-Geraden $[a;b;d]^*$ heißt ,normiert', falls $a^2 + b^2 - c^2 = 1$.

Ein Tripel (p;q;s) des K-Punkts $(p;q;s)^*$ heißt ,normiert', falls $p^2 + q^2 - s^2 = -1$ ist.

Da für K-Geraden stets $a^2 + b^2 - c^2 > 0$ ist, gibt es zu jeder K-Geraden $[a;b;d]^*$ genau zwei

normierte Tripel, nämlich die Tripel $\left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}; \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}} \right]$ und $\left[\frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}; \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}; \frac{-d}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}} \right]$. Entsprechendes gilt für K-Punkte.

Satz 33 (zum K-Baryzentrum): G, H und J seien drei nicht kollinearen K-Punkt mit normierte Tripel $\overrightarrow{v_G}$, $\overrightarrow{v_H}$ und $\overrightarrow{v_J}$, die eine positive dritte Komponente haben. Dann gilt:

1. $\overrightarrow{v_{HJ}} := \overrightarrow{v_H} + \overrightarrow{v_J}$, $\overrightarrow{v_{JG}} := \overrightarrow{v_J} + \overrightarrow{v_G}$ bzw. $\overrightarrow{v_{GH}} := \overrightarrow{v_G} + \overrightarrow{v_H}$ sind Tripel der K-Seitenmitten M_{HJ} , M_{JG} und M_{GH} des Dreiecks GHJ. Wenn x_H, y_H, x_J und y_J die kartesischen Koordinaten von H und J sind, dann teilt M_{HJ} die Strecke HJ innen euklidisch im

$$\text{Verhältnis } \frac{\sqrt{-x_J^2 - y_J^2 + 1}}{\sqrt{-x_H^2 - y_H^2 + 1}}.$$

2. $\overrightarrow{v_{H-J}} := \overrightarrow{v_H} - \overrightarrow{v_J}$, $\overrightarrow{v_{J-G}} := \overrightarrow{v_J} - \overrightarrow{v_G}$ bzw. $\overrightarrow{v_{G-H}} := \overrightarrow{v_G} - \overrightarrow{v_H}$ sind Tripel von kollinearen projektiven Punkten M'_{HJ} , M'_{JG} und M'_{GH} , die keine K-Punkte sind. M'_{HJ} teilt die Strecke HJ euklidisch im gleichen Verhältnis außen, wie M_{HJ} die Strecke innen teilt. M'_{HJ} , M'_{JG} und M'_{GH} liegen auf der projektiven Geraden s zum Tripel

$$\overrightarrow{v_s} := \overrightarrow{v_G} \times \overrightarrow{v_H} + \overrightarrow{v_H} \times \overrightarrow{v_J} + \overrightarrow{v_J} \times \overrightarrow{v_G}$$

3. Der projektive Punkt S mit dem Tripel $\overrightarrow{v_{GHJ}} := \overrightarrow{v_G} + \overrightarrow{v_H} + \overrightarrow{v_J}$ ist ein K-Punkt und liegt auf allen K-Seitenhalbierenden des Dreiecks GHJ. s ist die trilineare Polare von S bezüglich G, H und J.

Beweis : 1. Sei $\vec{v}_H = (p_H; q_H; s_H)$ und $\vec{v}_J = (p_J; q_J; s_J)$. Es ist

$p_H \cdot p_J + q_H \cdot q_J \leq \sqrt{p_H^2 + q_H^2} \cdot \sqrt{p_J^2 + q_J^2}$, weil das Skalarprodukt zweier zweidimensionaler Vektoren kleiner gleich dem Produkt ihrer Längen ist (Cauchy-Schwarz-Ungleichung). Wegen

$p_H^2 + q_H^2 - s_H^2 = -1$ ist $\sqrt{p_H^2 + q_H^2} < s_H$, denn nach Voraussetzung ist $s_H > 0$. Entsprechend ist

$\sqrt{p_J^2 + q_J^2} < s_J$. Darum ist $\vec{v}_H * \vec{v}_J = p_H \cdot p_J + q_H \cdot q_J - s_H \cdot s_J < 0$ und

$$\vec{v}_{HJ} * \vec{v}_{HJ} = (\vec{v}_H + \vec{v}_J) * (\vec{v}_H + \vec{v}_J) = \vec{v}_H * \vec{v}_H + 2 \cdot \vec{v}_H * \vec{v}_J + \vec{v}_J * \vec{v}_J = 2 \cdot (\vec{v}_H * \vec{v}_J - 1) < 0.$$

\vec{v}_{HJ} gehört also zu einem K-Punkt M_{HJ} .

$$\text{Aus } \frac{(\vec{v}_{HJ} * \vec{v}_{HJ})^2}{(\vec{v}_{HJ} * \vec{v}_{HJ}) \cdot (\vec{v}_H * \vec{v}_H)} = \frac{(\vec{v}_H * \vec{v}_H + \vec{v}_J * \vec{v}_H)^2}{(\vec{v}_{HJ} * \vec{v}_{HJ}) \cdot (\vec{v}_H * \vec{v}_H)} = \frac{(-1 + \vec{v}_J * \vec{v}_H)^2}{-\vec{v}_{HJ} * \vec{v}_{HJ}} = \frac{(\vec{v}_{HJ} * \vec{v}_J)^2}{(\vec{v}_{HJ} * \vec{v}_{HJ}) \cdot (\vec{v}_J * \vec{v}_J)}$$

folgt nach Satz 24, dass M_{HJ} K-Mittelpunkt von HJ ist.

Analog wie beim Beweis von Satz 32 schließen wir:

Wenn x_H, y_H, x_J und y_J die kartesischen Koordinaten von H und j sind, ist $x_H = \frac{p_H}{s_H}$, $y_H = \frac{q_H}{s_H}$,

$x_J = \frac{p_J}{s_J}$ und $y_J = \frac{q_J}{s_J}$. Für die kartesischen Koordinaten von M_{HJ} gilt dann

$$x_{HJ} = \frac{p_H + p_J}{s_H + s_J} = \frac{s_H \cdot x_H + s_J \cdot x_J}{s_H + s_J} \quad \text{und} \quad y_{HJ} = \frac{q_H + q_J}{s_H + s_J} = \frac{s_H \cdot y_H + s_J \cdot y_J}{s_H + s_J}.$$

Darum teilt M_{HJ} die Strecke HJ innen euklidisch im Verhältnis $\frac{s_H}{s_J} = \frac{s_H \cdot \sqrt{-p_J^2 - q_J^2 + s_J^2}}{s_J \cdot \sqrt{-p_H^2 - q_H^2 + s_H^2}} = \frac{\sqrt{-x_J^2 - y_J^2 + 1}}{\sqrt{-x_H^2 - y_H^2 + 1}}$.

2. Da die Verbindungsgerade von H und J eine K-Gerade ist, gilt mit der Lagrange-Identität

$$0 < (\vec{v}_H \times \vec{v}_J) * (\vec{v}_H \times \vec{v}_J) = -(\vec{v}_H * \vec{v}_H) \cdot (\vec{v}_J * \vec{v}_J) + (\vec{v}_H * \vec{v}_J)^2 = -1 + (\vec{v}_H * \vec{v}_J)^2,$$

also $(\vec{v}_H * \vec{v}_J)^2 > 1$ und wegen $\vec{v}_H * \vec{v}_J < 0$ folglich $\vec{v}_H * \vec{v}_J < -1$.

Die Punkten M'_{HJ} , M'_{JG} und M'_{GH} sind keine K-Punkte denn

$$(\vec{v}_H - \vec{v}_J) * (\vec{v}_H - \vec{v}_J) = \vec{v}_H * \vec{v}_H - 2 \cdot \vec{v}_H * \vec{v}_J + \vec{v}_J * \vec{v}_J = 2 \cdot (-\vec{v}_H * \vec{v}_J - 1) > 0.$$

Die übrigen Aussagen zur 2. Behauptung folgen aus Satz 32.

3. ergibt sich ebenfalls aus Satz 32. □

Definition : S heißt K-Baryzentrum (K-Schwerpunkt) von GHJ.

Satz 34 (zum K-Umkreis-Zentrum): G, H und J seien drei nicht kollinearen K-Punkt mit normierte Tripel \vec{v}_G , \vec{v}_H und \vec{v}_J , die eine positive dritte Komponente haben. Dann gilt:

1. $\vec{v}_{HJ}^* := \vec{v}_H - \vec{v}_J$, $\vec{v}_{JG}^* := \vec{v}_J - \vec{v}_G$ bzw. $\vec{v}_{GH}^* := \vec{v}_G - \vec{v}_H$ sind Tripel der K-Mittelsenkrechten m_{HJ} , m_{JG} und m_{GH} des Dreiecks GHJ.

2. Der projektive Punkt M mit dem Tripel $\overrightarrow{v_{GHJ}^*} := \overrightarrow{v_G \times v_H} + \overrightarrow{v_H \times v_J} + \overrightarrow{v_J \times v_G}$ liegt auf den Geraden der K-Mittelsenkrechten zu $\overrightarrow{v_{HJ}^*}$, $\overrightarrow{v_{JG}^*}$ und $\overrightarrow{v_{GH}^*}$.

Wenn $\overrightarrow{v_{GHJ}^*}$ zu einem K-Punkt gehört, hat dieser von jedem Eckpunkt des Dreiecks

$$\text{GHJ den K-Abstand } \operatorname{ar} \cosh \left(\frac{|\det(\overrightarrow{v_G}; \overrightarrow{v_H}; \overrightarrow{v_J})|}{\sqrt{-\overrightarrow{v_{GHJ}^*} * \overrightarrow{v_{GHJ}^*}}} \right).$$

3. Die trilineare Polare bezüglich GHJ des Baryzentrums S von GHJ ist Polare von M bezüglich des Einheitskreises.

Beweis : 1.

$$\overrightarrow{v_{HJ}^*} \cdot (\overrightarrow{v_H} + \overrightarrow{v_J}) = (\overrightarrow{v_H} - \overrightarrow{v_J}) \cdot (\overrightarrow{v_H} + \overrightarrow{v_J}) = (\overrightarrow{v_H} - \overrightarrow{v_J}) * (\overrightarrow{v_H} + \overrightarrow{v_J}) = \overrightarrow{v_H} * \overrightarrow{v_H} - \overrightarrow{v_J} * \overrightarrow{v_J} = 1 - 1 = 0.$$

$\overrightarrow{v_{HJ}^*} \cdot (\overrightarrow{v_H} \times \overrightarrow{v_J}) = (\overrightarrow{v_H} - \overrightarrow{v_J}) \cdot (\overrightarrow{v_H} \times \overrightarrow{v_J}) = (\overrightarrow{v_H} - \overrightarrow{v_J}) \cdot (\overrightarrow{v_H} \times \overrightarrow{v_J}) = 0$. Darum ist $\overrightarrow{v_{HJ}^*}$ Tripel der K-Mittelsenkrechten von HJ.

2.

$$\overrightarrow{v_{HJ}^*} \cdot \overrightarrow{v_{GHJ}^*} = (\overrightarrow{v_H} - \overrightarrow{v_J}) \cdot (\overrightarrow{v_G} \times \overrightarrow{v_H} + \overrightarrow{v_H} \times \overrightarrow{v_J} + \overrightarrow{v_J} \times \overrightarrow{v_G}) = (\overrightarrow{v_H} - \overrightarrow{v_J}) \cdot (\overrightarrow{v_G} \times \overrightarrow{v_H} + \overrightarrow{v_H} \times \overrightarrow{v_J} + \overrightarrow{v_J} \times \overrightarrow{v_G}) = \overrightarrow{v_H} \cdot (\overrightarrow{v_J} \times \overrightarrow{v_G}) - \overrightarrow{v_J} \cdot (\overrightarrow{v_G} \times \overrightarrow{v_H}) = 0. \text{ Darum liegt M auf } m_{HJ}.$$

$$\overrightarrow{v_G} * \overrightarrow{v_{GHJ}^*} = \overrightarrow{v_G} \cdot (\overrightarrow{v_G} \times \overrightarrow{v_H} + \overrightarrow{v_H} \times \overrightarrow{v_J} + \overrightarrow{v_J} \times \overrightarrow{v_G}) = \overrightarrow{v_G} \cdot (\overrightarrow{v_H} \times \overrightarrow{v_J}) = \det(\overrightarrow{v_G}; \overrightarrow{v_H}; \overrightarrow{v_J}). \text{ Nach Satz 24 gilt}$$

$$\text{für den Abstand } \delta \text{ von G : } (\cosh(\delta))^2 = \frac{(\overrightarrow{v_G} * \overrightarrow{v_{GHJ}^*})^2}{-\overrightarrow{v_{GHJ}^*} * \overrightarrow{v_{GHJ}^*}} = \frac{|\det(\overrightarrow{v_G}; \overrightarrow{v_H}; \overrightarrow{v_J})|^2}{\sqrt{-\overrightarrow{v_{GHJ}^*} * \overrightarrow{v_{GHJ}^*}}}. \text{ Daraus folgt die 2.}$$

Behauptung.

3. folgt mit Satz 33 unmittelbar aus

$$\overrightarrow{v_{GHJ}^*} := \overrightarrow{v_G \times v_H} + \overrightarrow{v_H \times v_J} + \overrightarrow{v_J \times v_G} = \overrightarrow{v_G \times v_H} + \overrightarrow{v_H \times v_J} + \overrightarrow{v_J \times v_G}. \quad \square$$

Satz 35 (zum K-Orthozentrum): g, h und j seien drei K-Geraden, die sich in den nicht kollinearen K-Punkten J, G und H schneiden. $\overrightarrow{v_g}$, $\overrightarrow{v_h}$ und $\overrightarrow{v_j}$ bzw. $\overrightarrow{v_G}$, $\overrightarrow{v_H}$ und $\overrightarrow{v_J}$ seien Tripel von g, h und j bzw. G, H und J. Dann gilt:

1. $\overrightarrow{v_{hj}} := \overrightarrow{v_h} \cdot (\overrightarrow{v_g} * \overrightarrow{v_j}) - \overrightarrow{v_j} \cdot (\overrightarrow{v_g} * \overrightarrow{v_h})$, $\overrightarrow{v_{jg}} := \overrightarrow{v_j} \cdot (\overrightarrow{v_h} * \overrightarrow{v_g}) - \overrightarrow{v_g} \cdot (\overrightarrow{v_h} * \overrightarrow{v_j})$ bzw. $\overrightarrow{v_{gh}} := \overrightarrow{v_g} \cdot (\overrightarrow{v_j} * \overrightarrow{v_h}) - \overrightarrow{v_h} \cdot (\overrightarrow{v_j} * \overrightarrow{v_g})$ sind Tripel von K-Höhengeraden durch G, H bzw. J.

2. Der projektive Punkt H mit dem Tripel $\overrightarrow{v_{ghj}^*} := \frac{\overrightarrow{v_g \times v_h}}{\overrightarrow{v_g} * \overrightarrow{v_h}} + \frac{\overrightarrow{v_h \times v_j}}{\overrightarrow{v_h} * \overrightarrow{v_j}} + \frac{\overrightarrow{v_j \times v_g}}{\overrightarrow{v_j} * \overrightarrow{v_g}}$ liegt auf den Geraden der K-Höhengeraden zu $\overrightarrow{v_{hj}}$, $\overrightarrow{v_{jg}}$ und $\overrightarrow{v_{gh}}$.

$$3. \frac{\overline{\overline{v_G \times v_H}}}{\overline{v_G * v_H}} + \frac{\overline{\overline{v_H \times v_J}}}{\overline{v_H * v_J}} + \frac{\overline{\overline{v_J \times v_G}}}{\overline{v_J * v_G}} \text{ und}$$

$$\frac{\overline{v_G}}{(\overline{v_G \times v_H}) * (\overline{v_G \times v_J})} + \frac{\overline{v_H}}{(\overline{v_H \times v_J}) * (\overline{v_H \times v_G})} + \frac{\overline{v_J}}{(\overline{v_J \times v_G}) * (\overline{v_J \times v_H})} \text{ sind ebenfalls}$$

Tripel von H.

Beweis : 1. Da $\overline{v_{hj}}$ Linearkombination von $\overline{v_h}$ und $\overline{v_j}$ ist, geht die Gerade zu $\overline{v_{hj}}$ durch den K-Punkt G und ist folglich K-Gerade.

$\overline{v_{hj}} * \overline{v_g} = (\overline{v_h} * \overline{v_g}) \cdot (\overline{v_g} * \overline{v_j}) - (\overline{v_j} * \overline{v_g}) \cdot (\overline{v_g} * \overline{v_h}) = 0$. Darum ist die zu $\overline{v_{hj}}$ gehörige Gerade orthogonal zu g, folglich die Höhengerade durch G.

$$2. \overline{v_{ghj}}^* \cdot \overline{v_{hj}} = \left(\frac{\overline{v_j \times v_g}}{\overline{v_j * v_g}} \cdot \overline{v_h} \right) \cdot (\overline{v_g} * \overline{v_j}) - \left(\frac{\overline{v_g \times v_h}}{\overline{v_g * v_h}} \cdot \overline{v_j} \right) \cdot (\overline{v_g} * \overline{v_h}) = (\overline{v_j \times v_g}) \cdot \overline{v_h} - (\overline{v_g \times v_h}) \cdot \overline{v_j} = 0$$

Darum liegt der zu $\overline{v_{ghj}}^*$ gehörige projektive Punkt auf H. Das Gleiche gilt für die anderen Höhengeraden.

3. Nach Hilfssatz 6 und der Grassmann-Identität hat die Höhengerade durch G das Tripel

$$\overline{v_G} \times (\overline{v_H \times v_J}) = -\overline{v_G} \times (\overline{v_H \times v_J}) = -\overline{v_H} \cdot (\overline{v_G} \cdot \overline{v_J}) + \overline{v_J} \cdot (\overline{v_G} \cdot \overline{v_H}) = -\overline{v_H} \cdot (\overline{v_G} * \overline{v_J}) + \overline{v_J} \cdot (\overline{v_G} * \overline{v_H})$$

und es ist

$$\left(\frac{\overline{\overline{v_G \times v_H}}}{\overline{v_G * v_H}} + \frac{\overline{\overline{v_H \times v_J}}}{\overline{v_H * v_J}} + \frac{\overline{\overline{v_J \times v_G}}}{\overline{v_J * v_G}} \right) \cdot \left(-\overline{v_H} \cdot (\overline{v_G} * \overline{v_J}) + \overline{v_J} \cdot (\overline{v_G} * \overline{v_H}) \right) =$$

$$- \left(\frac{\overline{\overline{v_J \times v_G}}}{\overline{v_J * v_G}} \cdot \overline{v_H} \right) \cdot (\overline{v_G} * \overline{v_J}) + \left(\frac{\overline{\overline{v_G \times v_H}}}{\overline{v_G * v_H}} \cdot \overline{v_J} \right) \cdot (\overline{v_G} * \overline{v_H}) = 0.$$

$$\overline{v_G} \times (\overline{v_H \times v_J}) \cdot \left(\frac{\overline{v_G}}{(\overline{v_G \times v_H}) * (\overline{v_G \times v_J})} + \frac{\overline{v_H}}{(\overline{v_H \times v_J}) * (\overline{v_H \times v_G})} + \frac{\overline{v_J}}{(\overline{v_J \times v_G}) * (\overline{v_J \times v_H})} \right) =$$

$$\left(-\overline{v_H} \cdot (\overline{v_G} * \overline{v_J}) + \overline{v_J} \cdot (\overline{v_G} * \overline{v_H}) \right) \cdot \left(\frac{\overline{v_H}}{(\overline{v_H \times v_J}) * (\overline{v_H \times v_G})} + \frac{\overline{v_J}}{(\overline{v_J \times v_G}) * (\overline{v_J \times v_H})} \right) =$$

$$\frac{-\overline{(v_H * v_H)} \cdot (\overline{v_G} * \overline{v_J}) + \overline{(v_J * v_H)} \cdot (\overline{v_G} * \overline{v_H})}{(\overline{v_H \times v_J}) * (\overline{v_H \times v_G})} + \frac{-\overline{(v_H * v_J)} \cdot (\overline{v_G} * \overline{v_J}) + \overline{(v_J * v_J)} \cdot (\overline{v_G} * \overline{v_H})}{(\overline{v_J \times v_G}) * (\overline{v_J \times v_H})}. \text{ Dies}$$

ist gleich Null, denn $(\overline{v_J \times v_G}) * (\overline{v_J \times v_H}) = -(\overline{v_J * v_J}) \cdot (\overline{v_G} * \overline{v_H}) + (\overline{v_J * v_H}) \cdot (\overline{v_G} * \overline{v_J})$ nach Hilfssatz 5, folglich

$$\left(-\overline{(v_H * v_H)} \cdot (\overline{v_G} * \overline{v_J}) + \overline{(v_J * v_H)} \cdot (\overline{v_G} * \overline{v_H}) \right) \cdot \left((\overline{v_J \times v_G}) * (\overline{v_J \times v_H}) \right) =$$

$$\overline{(v_H * v_H)} \cdot (\overline{v_G} * \overline{v_J}) \cdot (\overline{v_J * v_J}) \cdot (\overline{v_G} * \overline{v_H}) - \overline{(v_H * v_H)} \cdot (\overline{v_G} * \overline{v_J}) \cdot (\overline{v_J * v_H}) \cdot (\overline{v_J * v_H})$$

$$- \overline{(v_H * v_J)} \cdot (\overline{v_G} * \overline{v_H}) \cdot (\overline{v_J * v_J}) \cdot (\overline{v_G} * \overline{v_H}) + \overline{(v_H * v_J)} \cdot (\overline{v_G} * \overline{v_H}) \cdot (\overline{v_J * v_H}) \cdot (\overline{v_G} * \overline{v_J}) \text{ und}$$

$-\left(\overrightarrow{(\overline{v_H * v_J})} \cdot \overrightarrow{(\overline{v_G * v_J})} + \overrightarrow{(\overline{v_J * v_J})} \cdot \overrightarrow{(\overline{v_G * v_H})}\right) \cdot \left(\overline{v_H} \times \overline{v_J}\right) * \left(\overline{v_H} \times \overline{v_G}\right)$ ergibt das Gleiche. \square

Beim Orthozentrum ist die Normierung der Tripel nicht vorteilhaft. Wenn man die Tripel von G, H, J, g, h, und j in Satz 35 mit -1 multipliziert, ändert sich H nicht, anders als S oder M in den Sätzen 33 und 34 oder D im folgenden Satz 36.

Satz 36 (zum K-Inkreis-Zentrum): g, h und j seien drei K-Geraden, die sich in den nicht kollinearen K-Punkten J, G und H schneiden. $\overline{v_g}$, $\overline{v_h}$ und $\overline{v_j}$ bzw. $\overline{v_G}$, $\overline{v_H}$ und $\overline{v_J}$ seien normierte Tripel von g, h und j bzw. G, H und J. Dann gilt:

1. $\overline{v_{hj}} := \overline{v_h} - \overline{v_j}$, $\overline{v_{jg}} := \overline{v_j} - \overline{v_g}$ bzw. $\overline{v_{gh}} := \overline{v_g} - \overline{v_h}$ sind Tripel von K-Winkelhalbierenden durch G, H bzw. J.
2. Der projektive Punkt D mit dem Tripel $\overline{v_{ghj}} := \overline{v_g} \times \overline{v_h} + \overline{v_h} \times \overline{v_j} + \overline{v_j} \times \overline{v_g}$ liegt auf den Geraden der K-Winkelhalbierenden zu $\overline{v_{hj}}$, $\overline{v_{jg}}$ und $\overline{v_{gh}}$.

Wenn $\overline{v_{ghj}}$ zu einem K-Punkt gehört, hat dieser von jeder der Geraden zu $\overline{v_g}$, $\overline{v_h}$ und

$$\overline{v_j} \text{ den K-Abstand } \operatorname{arsinh} \left(\frac{|\det(\overline{v_g}; \overline{v_h}; \overline{v_j})|}{\sqrt{-\overline{v_{ghj}} * \overline{v_{ghj}}}} \right).$$

3. Durch Änderung der Vorzeichen von $\overline{v_g}$, $\overline{v_h}$ und $\overline{v_j}$ erhält man mit der Formel der 2. Behauptung vier verschiedenen K-Winkelhalbierenden-Schnittpunkte.
4. $\overline{v_{GHJ}} := \overline{v_G} \cdot \sqrt{(\overline{v_H * v_J})^2 - 1} + \overline{v_H} \cdot \sqrt{(\overline{v_J * v_G})^2 - 1} + \overline{v_J} \cdot \sqrt{(\overline{v_G * v_H})^2 - 1}$ ist ebenfalls ein Tripel eines K-Winkelhalbierenden-Schnittpunkts.

Beweis : 1. Da $\overline{v_{hj}}$ Linearkombination von $\overline{v_h}$ und $\overline{v_j}$ ist, geht die Gerade zu $\overline{v_{hj}}$ durch den K-Punkt G und ist folglich K-Gerade.

$$\frac{\overline{v_{hj}} * \overline{v_h}}{\sqrt{\overline{v_{hj}} * \overline{v_{hj}}} \cdot \sqrt{\overline{v_h} * \overline{v_h}}} = \frac{\overline{v_h} * \overline{v_h} - \overline{v_j} * \overline{v_h}}{\sqrt{\overline{v_{hj}} * \overline{v_{hj}}}} = \frac{1 - \overline{v_j} * \overline{v_h}}{\sqrt{\overline{v_{hj}} * \overline{v_{hj}}}} = \frac{\overline{v_j} * \overline{v_j} - \overline{v_j} * \overline{v_h}}{\sqrt{\overline{v_{hj}} * \overline{v_{hj}}}} = \frac{\overline{v_{hj}} * \overline{v_j}}{\sqrt{\overline{v_{hj}} * \overline{v_{hj}}} \cdot \sqrt{\overline{v_j} * \overline{v_j}}}.$$

Darum ist nach Satz 24 der Kosinus der Winkel, welche die Gerade zu $\overline{v_{hj}}$ mit h und j bilden, für beide Geraden gleich. Darum ist die Gerade zu $\overline{v_{hj}}$ eine Winkelhalbierende.

2. $\overline{v_g} \times \overline{v_h} + \overline{v_h} \times \overline{v_j} + \overline{v_j} \times \overline{v_g} \neq (0;0;0)$, da G, H und J nicht kollinear sind.

$$\overline{v_{hj}} \cdot \left(\overline{v_g} \times \overline{v_h} + \overline{v_h} \times \overline{v_j} + \overline{v_j} \times \overline{v_g}\right) = \overline{v_h} \cdot \left(\overline{v_g} \times \overline{v_h} + \overline{v_h} \times \overline{v_j} + \overline{v_j} \times \overline{v_g}\right) - \overline{v_j} \cdot \left(\overline{v_g} \times \overline{v_h} + \overline{v_h} \times \overline{v_j} + \overline{v_j} \times \overline{v_g}\right) = \overline{v_h} \cdot \left(\overline{v_j} \times \overline{v_g}\right) - \overline{v_j} \cdot \left(\overline{v_g} \times \overline{v_h}\right) = 0. \text{ Für } \overline{v_{jg}} \text{ und } \overline{v_{gh}} \text{ verläuft die Rechnung analog. Deshalb liegt D auf den drei zugehörigen Winkelhalbierenden.}$$

Wenn D ein K-Punkt ist, dann ist $\overline{v_{ghj}} * \overline{v_{ghj}} < 0$.

$$\overline{v_g} \cdot \overline{v_{ghj}} = \overline{v_g} \cdot \left(\overline{v_g} \times \overline{v_h} + \overline{v_h} \times \overline{v_j} + \overline{v_j} \times \overline{v_g}\right) = \overline{v_g} \cdot \left(\overline{v_h} \times \overline{v_j}\right) = \det(\overline{v_g}; \overline{v_h}; \overline{v_j}). \text{ Nach Satz 24 gilt}$$

$$\text{darum für den Abstand } \delta \text{ von g : } (\sinh(\delta))^2 = \frac{(\overline{v_g} \cdot \overline{v_{ghj}})^2}{-\overline{v_{ghj}} * \overline{v_{ghj}}} = \frac{|\det(\overline{v_g}; \overline{v_h}; \overline{v_j})|^2}{\sqrt{-\overline{v_{ghj}} * \overline{v_{ghj}}}}. \text{ Da sich für h und}$$

j derselbe Term ergibt, folgt die 2. Behauptung.

3. Durch Änderung der Vorzeichen von $\overrightarrow{v_g}$, $\overrightarrow{v_h}$ und $\overrightarrow{v_j}$ erhält man acht verschiedene Terme für $\overrightarrow{v_g} \times \overrightarrow{v_h} + \overrightarrow{v_h} \times \overrightarrow{v_j} + \overrightarrow{v_j} \times \overrightarrow{v_g}$, die sich aber paarweise nur im Vorzeichen unterscheiden. Die Terme zu $\overrightarrow{v_g} \times \overrightarrow{v_h} + \overrightarrow{v_h} \times \overrightarrow{v_j} + \overrightarrow{v_j} \times \overrightarrow{v_g}$, $-\overrightarrow{v_g} \times \overrightarrow{v_h} + \overrightarrow{v_h} \times \overrightarrow{v_j} + \overrightarrow{v_j} \times \overrightarrow{v_g}$, $\overrightarrow{v_g} \times \overrightarrow{v_h} - \overrightarrow{v_h} \times \overrightarrow{v_j} + \overrightarrow{v_j} \times \overrightarrow{v_g}$ und $\overrightarrow{v_g} \times \overrightarrow{v_h} + \overrightarrow{v_h} \times \overrightarrow{v_j} - \overrightarrow{v_j} \times \overrightarrow{v_g}$ gehören zu verschiedenen projektiven Punkten, da andernfalls einer der Summanden das Tripel (0;0;0) wäre.

4. Nach der Lagrange-Identität ist

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{v_g} * \overrightarrow{v_h})^2 - 1 &= -(\overrightarrow{v_g} * \overrightarrow{v_g}) \cdot (\overrightarrow{v_h} * \overrightarrow{v_h}) + (\overrightarrow{v_g} * \overrightarrow{v_h})^2 = (\overrightarrow{v_g} \times \overrightarrow{v_h}) * (\overrightarrow{v_g} \times \overrightarrow{v_h}). \text{ Darum ist} \\ \overrightarrow{v_{GHJ}} \times \overrightarrow{v_g} &= \left(\overrightarrow{v_g} \cdot \sqrt{(\overrightarrow{v_h} * \overrightarrow{v_j})^2 - 1} + \overrightarrow{v_h} \cdot \sqrt{(\overrightarrow{v_j} * \overrightarrow{v_g})^2 - 1} + \overrightarrow{v_j} \cdot \sqrt{(\overrightarrow{v_g} * \overrightarrow{v_h})^2 - 1} \right) \times \overrightarrow{v_g} = \\ & \left(\frac{\overrightarrow{v_j} \times \overrightarrow{v_g}}{\sqrt{(\overrightarrow{v_j} \times \overrightarrow{v_g}) * (\overrightarrow{v_j} \times \overrightarrow{v_g})}} - \frac{\overrightarrow{v_g} \times \overrightarrow{v_h}}{\sqrt{(\overrightarrow{v_g} \times \overrightarrow{v_h}) * (\overrightarrow{v_g} \times \overrightarrow{v_h})}} \right) \left((\overrightarrow{v_j} \times \overrightarrow{v_g}) * (\overrightarrow{v_j} \times \overrightarrow{v_g}) \right) \left((\overrightarrow{v_g} \times \overrightarrow{v_h}) * (\overrightarrow{v_g} \times \overrightarrow{v_h}) \right) \end{aligned}$$

.Da das Tripel $\frac{\overrightarrow{v_j} \times \overrightarrow{v_g}}{\sqrt{(\overrightarrow{v_j} \times \overrightarrow{v_g}) * (\overrightarrow{v_j} \times \overrightarrow{v_g})}}$ bzw. $\frac{\overrightarrow{v_g} \times \overrightarrow{v_h}}{\sqrt{(\overrightarrow{v_g} \times \overrightarrow{v_h}) * (\overrightarrow{v_g} \times \overrightarrow{v_h})}}$ normiert und proportional

zu $\overrightarrow{v_h}$ bzw. $\overrightarrow{v_j}$ ist, gehört $\overrightarrow{v_{GHJ}} \times \overrightarrow{v_g}$ zu einer Winkelhalbierenden. Das Gleiche gilt für $\overrightarrow{v_{GHJ}} \times \overrightarrow{v_h}$ und $\overrightarrow{v_{GHJ}} \times \overrightarrow{v_j}$. □

Da es zu jedem Eckpunkt des Dreiecks GHJ eine Winkelhalbierende gibt, die durch das Innere des Dreiecks verläuft, ist einer der vier Winkelhalbierenden-Schnittpunkte das K-Inkreis-Zentrum, folglich ein K-Punkt. Er ergibt sich, wenn die dritten Komponenten von $\overrightarrow{v_g}$, $\overrightarrow{v_h}$ und $\overrightarrow{v_j}$ positiv sind. Die anderen drei Winkelhalbierenden-Schnittpunkte können zum Teil außerhalb des Einheitskreises liegen.

Satz 37 (zur isogonalen Verwandtschaft): g , h und j seien drei K-Geraden, die sich in den nicht kollinearen K-Punkten J , G und H schneiden. $\overrightarrow{v_g}$, $\overrightarrow{v_h}$ und $\overrightarrow{v_j}$ bzw. $\overrightarrow{v_g}$, $\overrightarrow{v_h}$ und $\overrightarrow{v_j}$ seien normierte Tripel mit positiver dritter Komponente von g , h und j bzw. G , H und J . Q mit dem Tripel $\overrightarrow{v_Q}$ sei ein projektiver Punkt, der auf keiner Seitengeraden von GHJ liegt, und Q°

der projektive Punkt mit dem Tripel $\overrightarrow{v_{Q^\circ}} := \frac{\overrightarrow{v_h} \times \overrightarrow{v_j}}{\overrightarrow{v_Q} \cdot \overrightarrow{v_g}} + \frac{\overrightarrow{v_j} \times \overrightarrow{v_g}}{\overrightarrow{v_Q} \cdot \overrightarrow{v_h}} + \frac{\overrightarrow{v_g} \times \overrightarrow{v_h}}{\overrightarrow{v_Q} \cdot \overrightarrow{v_j}}$. Dann gilt:

1. $\overrightarrow{v_{Q_{hj}}} := (\overrightarrow{v_Q} \cdot \overrightarrow{v_j}) \cdot \overrightarrow{v_h} - (\overrightarrow{v_Q} \cdot \overrightarrow{v_h}) \cdot \overrightarrow{v_j}$ ist Tripel der Geraden QG und $\overrightarrow{v_{Q^\circ_{hj}}} := (\overrightarrow{v_Q} \cdot \overrightarrow{v_h}) \cdot \overrightarrow{v_h} - (\overrightarrow{v_Q} \cdot \overrightarrow{v_j}) \cdot \overrightarrow{v_j}$ Tripel der Geraden $Q^\circ G$. Die Spiegelung an dem Tripel $\overrightarrow{v_{hj}} := \overrightarrow{v_h} - \overrightarrow{v_j}$ zu einer Winkelhalbierenden durch G bildet $\overrightarrow{v_{Q_{hj}}}$ in $\overrightarrow{v_{Q^\circ_{hj}}}$ ab. Das Gleiche gilt, wenn man G , h j durch H , j , g oder J , g , h ersetzt.

2. Die K-Winkelgrößen der Winkels HGQ und Q°GJ stimmen überein. Das Gleiche gilt für die Winkelpaare JHQ, Q°HG sowie GJQ, Q°JH.

Beweis : 1. $\overrightarrow{v_{Qhj}}$ ist Tripel der Geraden k durch Q und G, da nach der Grassmann-Identität $(\overrightarrow{v_Q} \cdot \overrightarrow{v_j}) \cdot \overrightarrow{v_h} - (\overrightarrow{v_Q} \cdot \overrightarrow{v_h}) \cdot \overrightarrow{v_j} = \overrightarrow{v_Q} \times (\overrightarrow{v_h} \times \overrightarrow{v_j})$ gilt.

Es sei σ'_{hj} die Spiegelung für eckige Klammern an der Winkelhalbierenden zum Tripel

$$\overrightarrow{v_h} - \overrightarrow{v_j}. \text{ Dann ist } \overrightarrow{v_h} \sigma'_{hj} = -\overrightarrow{v_h} + 2 \cdot \frac{\overrightarrow{v_h} * (\overrightarrow{v_h} - \overrightarrow{v_j})}{(\overrightarrow{v_h} - \overrightarrow{v_j}) * (\overrightarrow{v_h} - \overrightarrow{v_j})} \cdot (\overrightarrow{v_h} - \overrightarrow{v_j}).$$

$$\overrightarrow{v_{Q^\circ}} \cdot \overrightarrow{v_{Q^\circ hj}} = \frac{\overrightarrow{v_j} \times \overrightarrow{v_g}}{\overrightarrow{v_Q} \cdot \overrightarrow{v_h}} \cdot (\overrightarrow{v_Q} \cdot \overrightarrow{v_h}) \cdot \overrightarrow{v_h} - \frac{\overrightarrow{v_g} \times \overrightarrow{v_h}}{\overrightarrow{v_Q} \cdot \overrightarrow{v_j}} \cdot (\overrightarrow{v_Q} \cdot \overrightarrow{v_j}) \cdot \overrightarrow{v_j} = (\det(\overrightarrow{v_j}; \overrightarrow{v_g}; \overrightarrow{v_h}) - \det(\overrightarrow{v_g}; \overrightarrow{v_h}; \overrightarrow{v_j})) = 0.$$

Wegen $\overrightarrow{v_G} \cdot \overrightarrow{v_{Q^\circ hj}} = 0$ ist darum $\overrightarrow{v_{Q^\circ hj}}$ Tripel von Q°G.

Wegen $(\overrightarrow{v_h} - \overrightarrow{v_j}) * (\overrightarrow{v_h} - \overrightarrow{v_j}) = 2 \cdot (1 - \overrightarrow{v_h} * \overrightarrow{v_j})$ folgt

$$\begin{aligned} 2 \cdot (1 - \overrightarrow{v_h} * \overrightarrow{v_j}) \cdot \overrightarrow{v_h} \sigma'_{hj} &= -((\overrightarrow{v_h} - \overrightarrow{v_j}) * (\overrightarrow{v_h} - \overrightarrow{v_j})) \cdot \overrightarrow{v_h} + 2 \cdot (\overrightarrow{v_h} * (\overrightarrow{v_h} - \overrightarrow{v_j})) \cdot (\overrightarrow{v_h} - \overrightarrow{v_j}) = \\ &= -2 \cdot (1 - \overrightarrow{v_h} * \overrightarrow{v_j}) \cdot \overrightarrow{v_h} + 2 \cdot (1 - \overrightarrow{v_h} * \overrightarrow{v_j}) \cdot (\overrightarrow{v_h} - \overrightarrow{v_j}) = -2 \cdot (1 - \overrightarrow{v_h} * \overrightarrow{v_j}) \cdot \overrightarrow{v_j}, \text{ also } \overrightarrow{v_h} \sigma'_{hj} = -\overrightarrow{v_j}. \text{ Analog} \\ \text{folgt } \overrightarrow{v_j} \sigma'_{hj} &= -\overrightarrow{v_h} \text{ und darum } \overrightarrow{v_{Qhj}} \sigma'_{hj} = -(\overrightarrow{v_Q} \cdot \overrightarrow{v_j}) \cdot \overrightarrow{v_j} + (\overrightarrow{v_Q} \cdot \overrightarrow{v_h}) \cdot \overrightarrow{v_h} = \overrightarrow{v_{Q^\circ hj}}. \end{aligned}$$

2. folgt aus der 1. Behauptung, weil K-Spiegelungen K-Winkelgrößen invertieren. \square

Definition : Der Punkt Q° aus Satz 37 heißt zu Q 'K-isogonal verwandt'.

Es ist offenbar $Q^{\circ\circ} = Q$.

25. Das Hyperbel-Modell

Abbildung 31 zeigt einen anschaulichen Weg für den Übergang vom Beltrami-Klein-Modell zum Hyperbel-Modell der hyperbolischen Geometrie. Das Beltrami-Klein-Modell ist hier zunächst in die Ebene $z = 1$ des dreidimensionalen Raums \mathbf{R}^3 verlegt worden, so dass der Mittelpunkt des Einheitskreises im Punkt $(0; 0; 1)$ liegt. Dieser Punkt ist der Scheitelpunkt der Schale des Hyperboloids H mit der Gleichung $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$, für die $z > 0$ ist.

Es seien p und q reelle Zahlen mit $p^2 + q^2 > 1$. Eine Ebene E mit der Gleichung

$-p \cdot x - q \cdot y + z = 0$ geht durch den Ursprung $(0; 0; 0)$ und eine Sehne des Einheitskreises mit dem Pol $(p; q; 1)$ in affinen Koordinaten. Die Auflösung nach z und Einsetzung in die Gleichung des Hyperboloids ergibt die Gleichung $-x^2 - y^2 + (p \cdot x + q \cdot y)^2 = 1$. Aus $z > 0$

folgt $p \cdot x + q \cdot y > 0$, so dass die Gleichung äquivalent mit $p \cdot x + q \cdot y - \sqrt{1 + x^2 + y^2} = 0$ ist.

Dies ist die Gleichung eines Hyperbel-Astes. Sie beschreibt die Kurve, die sich ergibt, wenn man die Schnittkurve von E und H parallel zur z-Achse auf die x-y-Ebene projiziert. Das Asymptoten-Paar der Hyperbel hat die Gleichung $-x^2 - y^2 + (p \cdot x + q \cdot y)^2 = 0$, für die beiden Asymptoten gilt darum

$$x \cdot (\sqrt{p^2 + q^2 - 1} - p \cdot q) - y \cdot (q^2 - 1) = 0 \quad \text{bzw.} \quad x \cdot (p^2 - 1) - y \cdot (\sqrt{p^2 + q^2 - 1} - p \cdot q) = 0.$$

Betrachtet man neben dem Beltrami-Klein-Modell in der Ebene $z = 1$ auch das in der x - y -Ebene, dann gehören diese Gleichungen zu den Ursprungsgeraden durch die Enden der Sehne auf der Geraden $-p \cdot x - q \cdot y + 1 = 0$. Da die Ebene durch die z -Achse und $(-p; -q; 1)$ eine Symmetrie-Ebene der Anordnung bildet, ist die Gerade $-q \cdot x + p \cdot y = 0$ Hauptachse der

Hyperbel und der Punkt $\left(\frac{p}{\sqrt{(p^2 + q^2) \cdot (p^2 + q^2 - 1)}}; \frac{q}{\sqrt{(p^2 + q^2) \cdot (p^2 + q^2 - 1)}} \right)$ Scheitelpunkt

des Hyperbelastes. Darum ist die Länge des Hauptachsenabschnitts $\frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 - 1}}$.

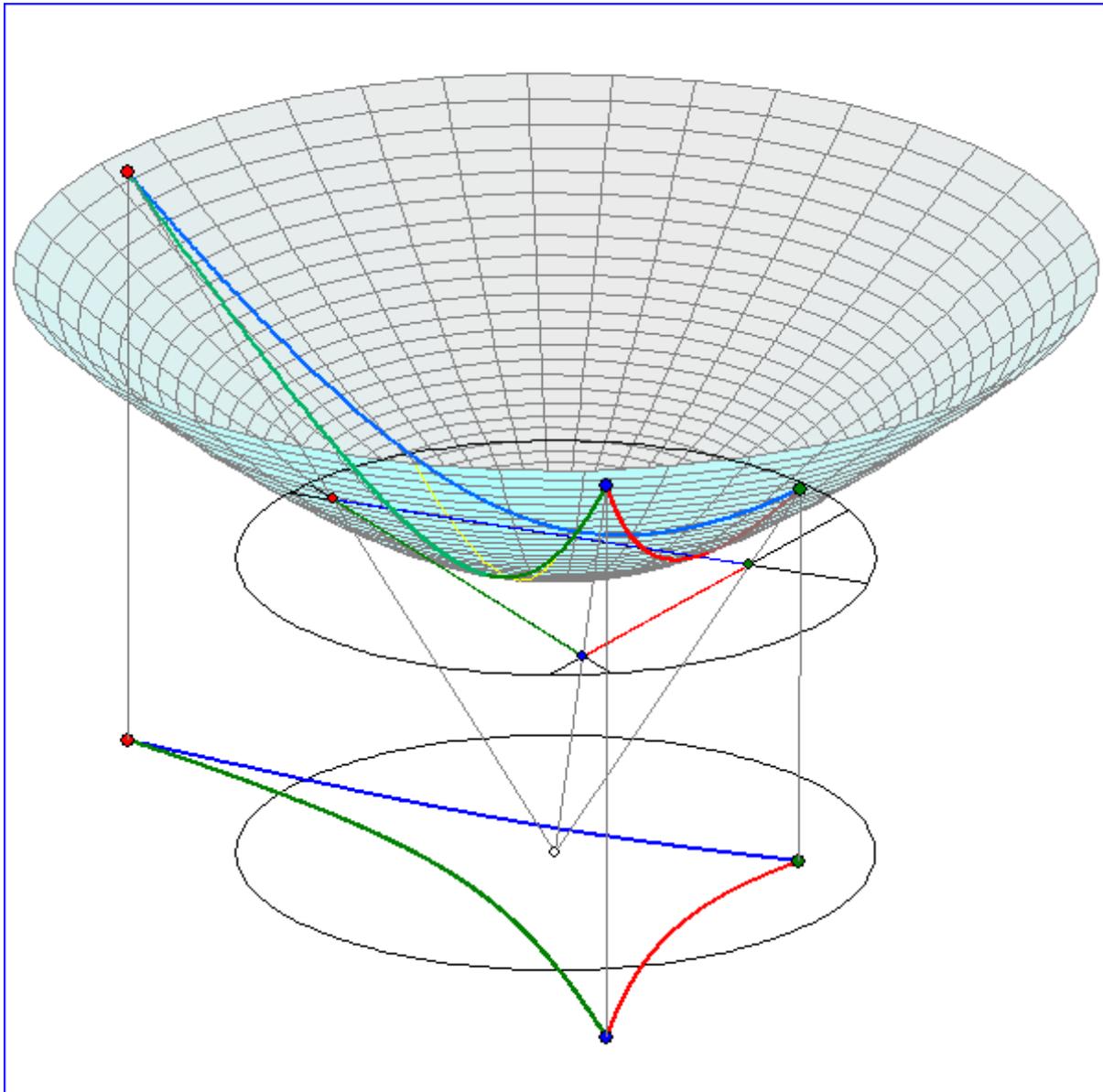


Abb. 31

Wenn die Ebene E die Gleichung $p \cdot x + q \cdot y = 0$ hat, also die z-Achse enthält, dann ergibt die Projektion der Schnittkurve von H und E in der x-y-Ebene die Ursprungsgerade $p \cdot x + q \cdot y = 0$ mit dem Pol $(p ; q ; 0)$.

Wir fassen Hyperbel-Äste und Ursprungsgeraden in einer Gleichung mit der Form $p \cdot x + q \cdot y - t \cdot \sqrt{1 + x^2 + y^2} = 0$ zusammen und bezeichnen die Kurve durch $[p; q; -t]^Y$, wobei $[\lambda \cdot p; \lambda \cdot q; -\lambda \cdot t]^Y$ für $\lambda \neq 0$ die gleiche Kurve beschreibt. Wir nennen Kurven dieser Art Y-Geraden. Sie sind die '*Geraden*' des Hyperbel-Modells. Den projektiven Punkt $(p; q; t)^\bullet$ zu der x-y-Ebene bezeichnen wir als Pol von $[p; q; -t]^Y$. Der Pol von $[p; q; -t]^Y$ stimmt also mit dem Pol der $[p; q; -t]^Y$ zugeordneten K-Geraden $[p; q; -t]^K$ überein.

Die Menge der '*Punkte*' des Hyperbel-Modells ist die Menge aller Punkte des \mathbf{R}^2 , wobei ein '*Punkt*' $(x ; y)$ mit einer '*Geraden*' $[p; q; -t]^Y$ inzidiert, wenn $p \cdot x + q \cdot y - t \cdot \sqrt{1 + x^2 + y^2} = 0$ gilt.

Zwischen den Y-Punkten auf $[p; q; -t]^Y$ und den K-Punkten auf $[p; q; -t]^K$ gibt es einen einfachen rechnerischen Zusammenhang:

Sei $Q(x ; y ; 1)$ ein Punkt innerhalb des Einheitskreises in der Ebene $z = 1$. Wir teilen dieses Koordinatentripel durch $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Dies ist der Wert, die im H-Modell die Höhe von Q genannt wurde. Im Beltrami-Klein-Modell ist es die halbe Länge der Sehne, von der Q der Mittelpunkt ist. Durch die Division entsteht der Punkt

$\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} ; \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} ; \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right)$ auf der Hyperboloid-Schale H. Die Projektion

parallel zur z-Achse in die x-y-Ebene ergibt den Punkt $\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} ; \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right)$. Man

kann folglich den Übergang vom Beltrami-Klein-Modell zum Hyperbel-Modell auch ohne den Umweg über das Hyperboloid beschreiben durch die Abbildung Ψ , die jedem K-Punkt

$(x; y; 1)^K$ den Punkt $\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} ; \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right)$ zuordnet. Dabei geht die Punktmenge der K-

Geraden $[p; q; -t]^K$ in die der Y-Geraden $[p; q; -t]^Y$ über.

Die Bildmenge von Ψ ist ganz \mathbf{R}^2 und $(x; y) \rightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} ; \frac{y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} ; 1 \right)^K$ ist

Umkehrabbildung von Ψ .

Der Mittelpunkt der K-Geraden $[p; q; -1]^K$ mit dem Pol P $(p ; q)$ ist der Punkt

$M = \left(\frac{p}{p^2 + q^2} ; \frac{q}{p^2 + q^2} \right)$ in kartesischen Koordinaten (siehe Abb. 32). Sein Bild

$\left(\frac{p}{\sqrt{(p^2 + q^2) \cdot (p^2 + q^2 - 1)}} ; \frac{q}{\sqrt{(p^2 + q^2) \cdot (p^2 + q^2 - 1)}} \right)$ bei Ψ ist der Scheitelpunkt S des

Hyperbel-Astes $[p; q; -1]^Y$. Die Streckung $(x; y) \rightarrow \left(x \cdot \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{p^2 + q^2 - 1}}; y \cdot \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{p^2 + q^2 - 1}} \right)$ bildet M

auf S, die Asymptoten von $[p; q; -1]^Y$ auf sich und die Sehne $[p; q; -1]^K$ auf den Abschnitt der Scheiteltangente zwischen den Asymptoten ab. Dieser Abschnitt hat die Länge

$$2 \cdot \sqrt{1 - \frac{p^2}{(p^2 + q^2)^2} - \frac{q^2}{(p^2 + q^2)^2}} \cdot \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{p^2 + q^2 - 1}} = 2. \text{ Er ist das Zweifache der Länge des}$$

Nebenachsen-Abschnitts der Hyperbel, der folglich den Wert 1 hat. Da jeder Punkt in $\mathbf{R}^2 - \{(0; 0)\}$ Scheitelpunkt eines Hyperbelastes $[p; q; -1]^Y$ ist, sind diese Hyperbeläste genau die Hyperbeläste, deren Nebenachsen-Abschnitt die Länge 1 hat und deren Asymptoten sich im Ursprung schneiden.

Die numerische Exzentrizität ist $\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 - 1}^2}} \cdot \sqrt{p^2 + q^2 - 1} = \sqrt{p^2 + q^2}$, darum hat der

Brennpunkt F die Koordinaten $\left(\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 - 1}}; \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 - 1}} \right)$.

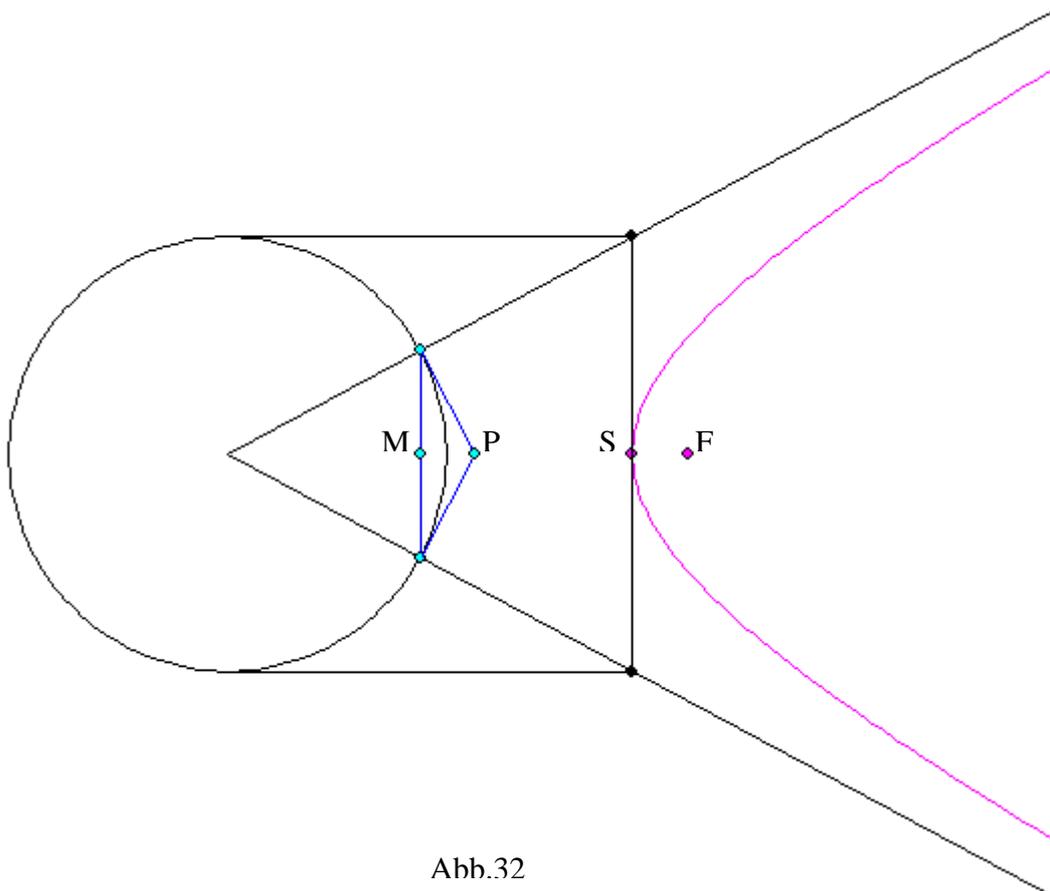


Abb.32

Die Maß-Bestimmungen des Hyperbel-Modells übertragen wir aus dem Beltrami-Klein-Modell:

Jeder Hyperbel $[p; q; -1]^Y$ sei der gleiche Kreisbogen zugeordnet wie der K-Geraden $[p; q; -1]^K$. Es ist dies also der Kreisbogen innerhalb des Einheitskreises um den Ursprung,

dessen Zentrum der Pol $(p ; q)$ und dessen Radius $\sqrt{p^2 + q^2 - 1}$ ist. Dieser Kreisbogen berührt die Asymptoten in den Enden von $[p; q; -1]^K$. Der Ursprungsgeraden $[p; q; 0]^Y$ ordnen wir die Sehne des Einheitskreises zu, die auf der Ursprungsgeraden liegt, und bezeichnen sie ebenfalls als 'zugeordneten Kreisbogen'. Die Größe des Winkels zwischen zwei Y-Geraden wird dann durch die Größe des Winkels zwischen den zugeordneten Kreisbögen definiert.

Der signierte Y-Abstand $\|SQ\|^Y$ des Y-Punktes Q vom Scheitelpunkt S der Y-Geraden $g = [p; q; -t]^Y$ sei gleich dem signierten K-Abstand des K-Punktes $Q' = \Psi^{-1}(Q)$ vom Scheitelpunkt $S' = \Psi^{-1}(S)$ der K-Geraden $g' = [p; q; -t]^K$. Wenn E_1 und E_2 die Enden von g' sind, dann ist $\|SQ\|^Y = 0,5 \cdot \ln \frac{|E_1 Q'|}{|Q' E_2|}$.

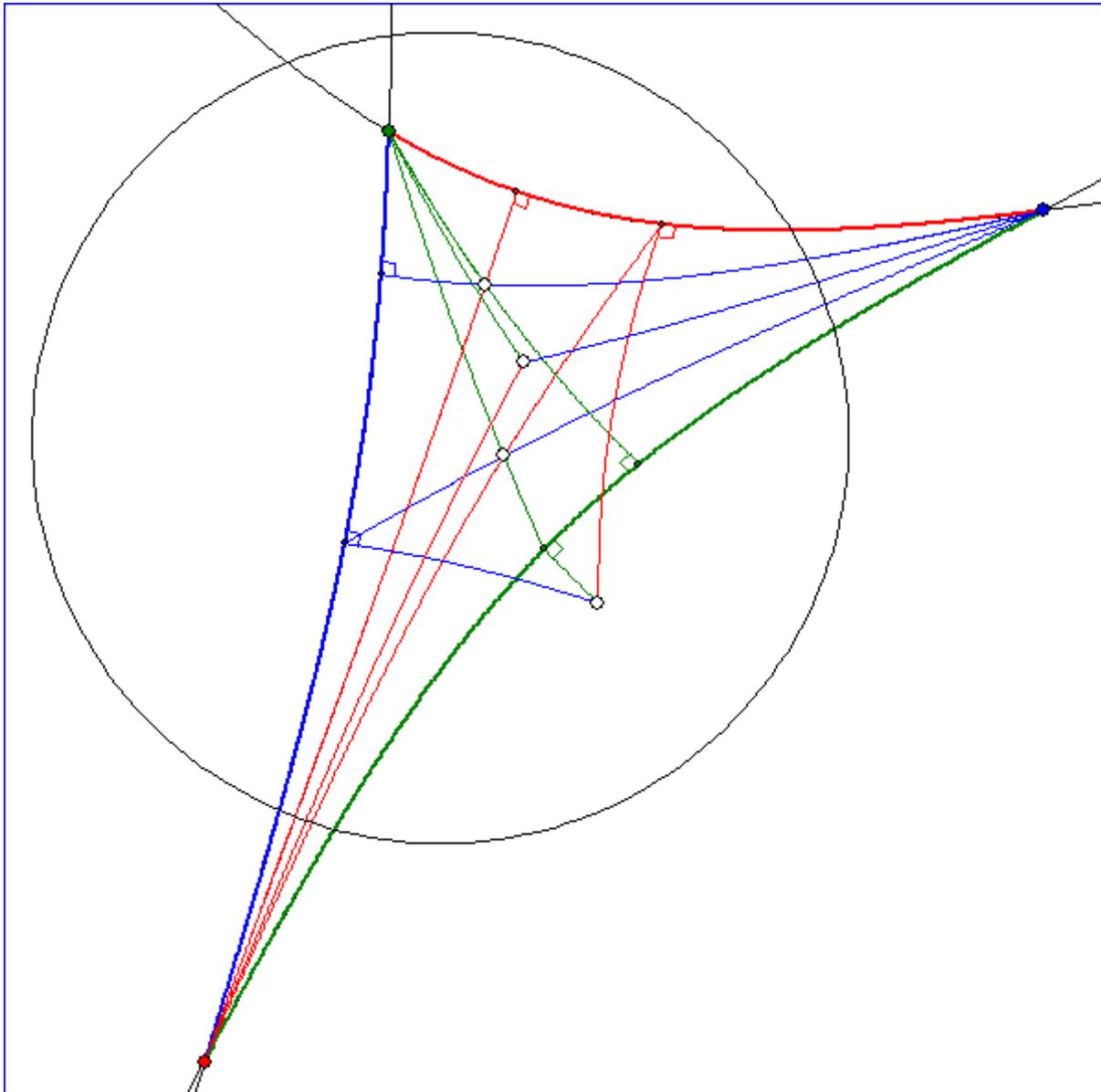


Abb. 33

g gehe nicht durch das Zentrum Z des Einheitskreises. Dann ist der euklidische Flächeninhalt $|ZE_1Q'|$ des Dreiecks ZE_1Q' gleich

$$0,5 \cdot |E_1Q'| \cdot |Q'Z| \cdot |\sin(\angle E_1Q'Z)| = 0,5 \cdot |ZE_1| \cdot |ZQ'| \cdot |\sin(\angle E_1ZQ')|.$$

Wegen $\angle E_1Q'Z = 180^\circ - \angle ZQ'E_2$ ist

$$\frac{|E_1Q'|}{|Q'E_2|} = \frac{0,5 \cdot |E_1Q'| \cdot |Q'Z| \cdot |\sin(\angle E_1Q'Z)|}{0,5 \cdot |E_2Q'| \cdot |Q'Z| \cdot |\sin(\angle E_2Q'Z)|} = \frac{0,5 \cdot |ZE_1| \cdot |ZQ'| \cdot |\sin(\angle E_1ZQ')|}{0,5 \cdot |ZE_2| \cdot |ZQ'| \cdot |\sin(\angle E_2ZQ')|} = \frac{|\sin(\angle E_1ZQ')|}{|\sin(\angle E_2ZQ')|}.$$

Da Z, Q und Q' kollinear sind, folgt $\|SQ\|^Y = 0,5 \cdot \ln \frac{|\sin(\angle E_1ZQ)|}{|\sin(\angle E_2ZQ)|}$.

Wenn g durch den Ursprung geht und Q die Koordinaten $(x; y)$ hat, dann hat Q' die Koordinaten $\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}; \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right)$ und den euklidischen Abstand $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

$$\text{Dann ist } \frac{|E_1Q'|}{|Q'E_2|} = \frac{1 + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}{1 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{1+x^2+y^2}}} = \left(\sqrt{1+x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2} \right)^2$$

und $\|ZQ\|^Y = \ln \left(\sqrt{1+x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2} \right)$.

Bei diesen Maßbestimmungen hat das Hyperbel-Modell die gleichen geometrischen Eigenschaften wie das Beltrami-Klein-Modell. Abbildung 33 zeigt ein Y-Dreieck mit Y-Seitenhalbierenden, Y-Mittelsenkrechten, Y-Höhen und Y-Winkelhalbierenden. Wie im Beltrami-Klein-Modell haben auch hier die Mittelsenkrechten und die Höhen nicht notwendig einen gemeinsamen Schnittpunkt. Wenn sich aber zwei dieser Y-Geraden von gleicher Art schneiden, dann geht auch die dritte durch diesen Schnittpunkt.

[1] Becker, Oskar, Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, 1975 (Suhrkamp)

[2] Euklid, Die Elemente, Oswalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Band 235 Frankfurt/Main 2010 (Verlag Harri Deutsch)

[3] Filler, Andreas, Euklidische und nicht-euklidische Geometrie, Berlin 1993
www.mathematik.hu-berlin.de/~filler/publikat/filler_eukl-ne-geom.pdf

[4] Hilbert, David, Grundlagen der Geometrie, Stuttgart 1968 (Teubner)

[5] Kant, Immanuel, Kritik der reinen Vernunft, Wiesbaden 1956 (Suhrkamp)

Bremen, 13. 5. 2014

Anhang : Das Zeitmaß im Beltrami-Klein-Modell

Satz 24 zeigt eine starke formale Ähnlichkeit bei der Berechnung von Abständen zwischen Punkten und Winkelgrößen zwischen Geraden im Halbkugel-Modell und daraus folgend auch im Beltrami-Klein-Modell. Diese Ähnlichkeit lässt sich geometrisch vertiefen, indem man jedem Punkt der affinen Ebene des Modells in jeder Richtung, die nicht Richtung einer Tangente durch P ist, nach der unten angegebenen Formel einen Geschwindigkeitsbetrag zuordnet. Auf dem Einheitskreis gibt es zu keinem Punkt eine Geschwindigkeit. Wenn P und Q zwei Punkte der affinen Ebene sind, die nicht vom Einheitskreis getrennt werden und deren Verbindungsgerade keine Tangente ist, dann ist es möglich, auf geradem Weg von P nach Q zu gelangen und dabei stets die Geschwindigkeit einzuhalten, die an dem jeweils passierten Ort vorgeschrieben ist. Die dafür benötigte Zeit bezeichnen wir als Zeitabstand von P und Q. Wenn die Bewegung auf einer orientierten Geraden stattfindet, kann damit auch ein signierter Abstand definiert werden.

Zur Festlegung der Geschwindigkeiten benutzen wir die im Abschnitt 7 definierte Potenz eines Punktes P der Ebene bezüglich eines Kreises mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r, nämlich die Differenz $|\overline{MP}|^2 - r^2$. Für den Einheitskreis des Beltrami-Klein-Modells und einen Punkt P mit kartesischen Koordinaten $(x ; y)$ ist die Potenz folglich durch $x^2 + y^2 - 1$ gegeben. Wir erweitern diese Begriffsbildung:

Definition : g sei eine Gerade der affinen Ebene des Beltrami-Klein-Modells und F_g der Fußpunkt des euklidischen Lots vom Ursprung auf g. Dann sei die Potenz von g gleich der Potenz von F_g .

Definition : g sei eine Gerade in der affinen Ebene, die keine Tangente an den Einheitskreis ist, und P ein Punkt auf g. Wir legen $\gamma(P; g) := \frac{|\text{Potenz von P}|}{\sqrt{|\text{Potenz von g}|}}$ als den zum Paar $(P ; g)$ gehörigen Geschwindigkeitsbetrag fest.

1. Fall : g sei zunächst eine Gerade, welche den Einheitskreis in zwei Punkten E_1 und E_2 schneidet.

Sei Z ein Punkt auf g. Der Abstand des Fußpunkts F_g vom Ursprung sei u, und der signierte euklidische Abstand des Punktes Z von F_g sei z genannt. $c := \sqrt{1 - u^2}$ ist der euklidische Abstand, den E_1 und E_2 von F_g haben. Dann ist die Potenz von g gleich $u^2 - 1 = -c^2$, die von Z gleich $z^2 + u^2 - 1 = z^2 - c^2$ und $\gamma(Z; g) := \frac{|z^2 - c^2|}{c}$.

Die Geschwindigkeit $\gamma(Z; g)$ ergibt sich als Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ für

eine Zeitdifferenz $\Delta t \rightarrow 0$. Es ist also $\Delta t = \frac{\Delta z}{\gamma(Z; g)}$. A und B seien zwei Punkte auf g mit den

signierten euklidischen Abständen a bzw. b von F_g , die nicht vom Kreis getrennt werden, und für die $a < b$ gilt. Die Zeit für den Weg von A nach B ergibt sich dann durch Integration:

$$\int_a^b \frac{1}{\gamma(Z; g)} dz = \left| \int_a^b \frac{c}{z^2 - c^2} dz \right| = \left| 0,5 \cdot \int_a^b \left(\frac{1}{z-c} - \frac{1}{z+c} \right) dz \right| =$$

$$\left| 0,5 \cdot \left(\ln \frac{b-c}{a-c} - \ln \frac{b+c}{a+c} \right) \right| = \left| 0,5 \cdot \ln \frac{(a+c) \cdot (b-c)}{(b+c) \cdot (a-c)} \right|.$$

Für A und B im Innern des Einheitskreises ist dies der Abstand im Klein-Modell.

Es soll nun gezeigt werden, dass für Punkte außerhalb des Einheitskreises das Zeitmaß den Abstand der K-Geraden h und j angibt, von denen A und B die Pole sind.

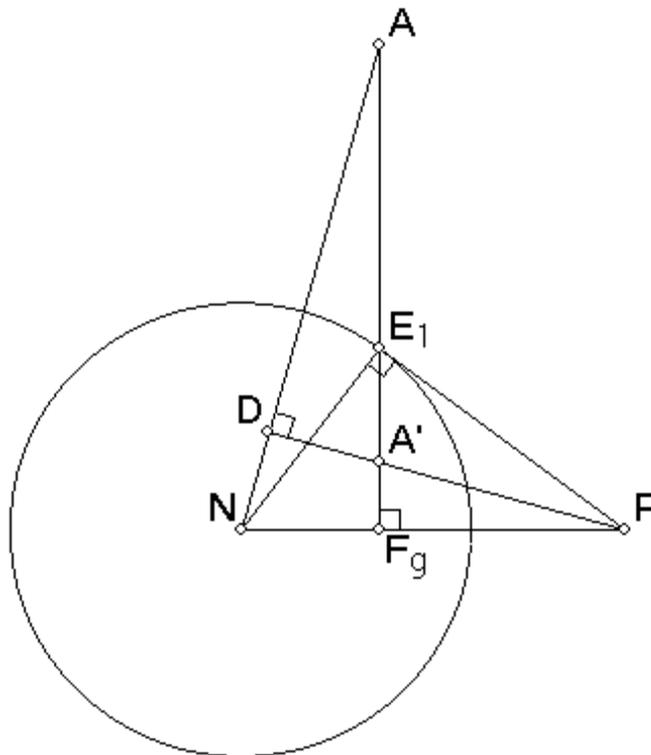
Dem signierten euklidischen Abstand z eines Punktes Z auf g vom Punkt F_g ordnen wir den

Abstand $z' := \frac{c^2}{z}$ zu. Der zugehörige Punkt Z' ist dann der Punkt auf g, der die Strecke E_1E_2

betragsmäßig im gleichen Verhältnis teilt wie Z, so dass E_1E_2 durch Z und Z' harmonisch geteilt wird. Für die entsprechenden Punkte A' und B' gilt dann

$$\left| 0,5 \cdot \ln \frac{(a+c) \cdot (b-c)}{(b+c) \cdot (a-c)} \right| = \left| 0,5 \cdot \ln \frac{(a'+c) \cdot (b'-c)}{(b'+c) \cdot (a'-c)} \right|. \text{ Zum Nachweis, dass dies der Abstand von h}$$

und j ist, muss also nur gezeigt werden, dass A' und B' die Schnittpunkte von h und j mit g sind.



In der Zeichnung ist P der Pol der Geraden g durch F_g und E_1 und A der Pol der Geraden h durch D und P. g und h sind K-orthogonal. Die Dreiecke $PA'F_g$ und ANF_g sind euklidisch

ähnlich. Für $u = |\overline{NF_g}|$, $v := |\overline{F_gP}|$, $a' = |\overline{A'F_g}|$ und $a = |\overline{AF_g}|$ gilt darum $\frac{a'}{v} = \frac{u}{a}$, folglich

$a' = \frac{u \cdot v}{a}$. Da NE_1P rechtwinklig ist, gilt nach dem Höhensatz $u \cdot v = c^2$. Darum ist $a' = \frac{c^2}{a}$.

Das Zeitmaß $\left| \int_a^b \frac{1}{\gamma(Z;g)} dz \right|$ gibt also den Abstand der Geraden h und j mit den Polen A und B an.

Für den Grenzübergang $b \rightarrow \infty$ ergibt sich bei $a > 0$ der endliche Wert $0,5 \cdot \ln \frac{a'+c}{a'-c}$.

Entsprechend erhält man beim Grenzübergang $a \rightarrow -\infty$ bei $b < 0$ den endlichen Wert $0,5 \cdot \ln \frac{b'-c}{b'+c}$. Man kann sich darum einen Weg von $a > 0$ über $+\infty, -\infty$ nach $b < 0$ denken mit

dem Zeitmaß $0,5 \cdot \ln \frac{a'+c}{a'-c} + 0,5 \cdot \ln \frac{b'-c}{b'+c} = 0,5 \cdot \ln \frac{(a'+c) \cdot (b'-c)}{(b'+c) \cdot (a'-c)}$. Darum gibt der Term

$\left| 0,5 \cdot \ln \frac{(a+c) \cdot (b-c)}{(b+c) \cdot (a-c)} \right|$ auch dann den Abstand zwischen den Geraden h und j an, wenn die Pole A und B außerhalb des Kreises auf verschiedenen Seiten des Kreises liegen.

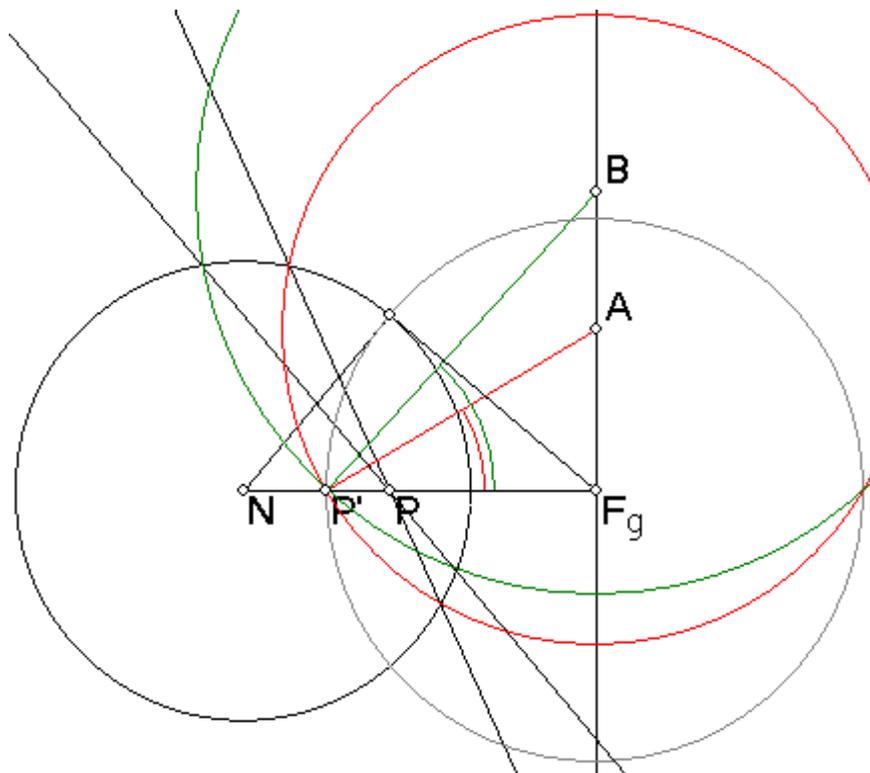
2.Fall : g hat keinen gemeinsamen Punkt mit dem Einheitskreis.

Z sei wieder ein Punkt auf g. Der Abstand u des Fußpunkts F_g vom Ursprung ist dann größer als 1. Sei hier $c := \sqrt{u^2 - 1}$. Die Potenz von g ist dann $u^2 - 1 = c^2$, die von Z gleich

$$z^2 + u^2 - 1 = z^2 + c^2 \text{ und } \gamma(Z;g) := \frac{z^2 + c^2}{c}.$$

Die Zeit für den Weg auf g von A nach B bei $a < b$ ergibt dann

$$\int_a^b \frac{1}{\gamma(Z;g)} dz = \int_a^b \frac{c}{z^2 + c^2} dz = \arctan \frac{b}{c} - \arctan \frac{a}{c}.$$



In der Abbildung ist P' der Winkel-Maßpunkt zu P und $c = \left| \overline{F_g P'} \right|$. Der rot bzw. grün markierte Winkel hat die euklidische Größe $\arctan \frac{a}{c}$ bzw. $\arctan \frac{b}{c}$, und der Winkel $AP'B$ die Größe $\arctan \frac{b}{c} - \arctan \frac{a}{c}$. Die beiden Polaren h und j von A und B gehen durch den Pol P von g . Da die K-Winkel-Größe des Winkels zwischen diesen Polaren durch die euklidische Größe von $AP'B$ gegeben ist, gibt also das Zeitmaß $\left| \int_a^b \frac{1}{\gamma(Z; g)} dz \right|$ diese K-Winkel-Größe an.

Anhang : Bremen, 1. 7. 2014

Revidiert : Bremen 18. 10. 2020